

УДК 517.947.42

МАТЕМАТИКА

Л. И. КАМИНИН, Б. Н. ХИМЧЕНКО

О ТЕОРЕМАХ ТИПА ЖИРО ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА 2-ГО ПОРЯДКА, СЛАБО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 17 III 1975)

Вопросу о влиянии геометрической конфигурации границы области на поведение вблизи границы непрерывных решений для равномерно эллиптических и равномерно параболических уравнений 2-го порядка посвящен ряд работ по качественной теории эллиптических и параболических уравнений (см. например, ⁽¹⁻¹³⁾).

В настоящей заметке аналогичные рассмотрения проведены для эллиптического оператора 2-го порядка с характеристической частью, вырождающейся вблизи границы. Получены следующие результаты:

1) если непрерывное решение эллиптического уравнения 2-го порядка имеет строгий локальный экстремум в точке M границы области и область слишком «узкая» вблизи M , а характеристическая часть уравнения слишком вырождается вблизи этой точки, то некасательная производная решения в точке M может обратиться в нуль;

2) если граничная точка экстремума M удовлетворяет относительно области требованию строгой Д-параболоидности изнутри (так, что область не слишком «узкая» вблизи точки M), а характеристическая часть уравнения слабо вырождается вблизи M , то некасательные производные решения в точке M обязательно отличны от нуля.

Пусть G — компактная область эвклидова пространства $E_n = \{(x_1, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$, в которой определен дифференциальный оператор 2-го порядка

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \quad (1)$$

с неотрицательной характеристической частью и с ограниченными коэффициентами.

Определение 1. Модуль непрерывности Ω удовлетворяет условию (А), если функция $\Omega(s)$ выпукла вверх на отрезке $[0, s_0]$ и дважды дифференцируема на интервале $(0, s_0)$.

Пусть $M^0 = x^0 \in E_n$, $h > 0$ и $(y) = (y_1, \dots, y_n)$ — местная декартова система координат с началом в точке M^0 . Рассмотрим параболоид вращения

$$\Pi_1(M^0, h) = \{y \in E_n \mid 0 < p_1(|y'|) < y_1 < h\},$$

где

$$y' = (y_2, \dots, y_n), \quad |y'|^2 = \sum_{i=2}^n y_i^2, \quad |y|^2 = y_1^2 + |y'|^2, \quad p_1(s) = s\Omega_1(s), \quad s \in [0, s_0],$$

причем модуль непрерывности Ω_1 удовлетворяет условию (А). Точка M^0 является вершиной параболоида $\Pi_1(M^0, h)$. Через $M^0 p_1 = (N_1, \dots, N_n)$, где $N_i = \cos(Ox_i, M^0 p_1)$ будем обозначать орт оси вращения параболоида $\Pi_1(M^0, h)$. Орт $M^0 p_1$ коллинеарен оси Oy_1 и входит в параболоид $\Pi_1(M^0, h)$.

Положим $\partial\Pi_1(M^0, h) = P_1(M^0, h) \cup B_1(h)$, где поверхность вращения $P_1(M^0, h)$ имеет в местной системе координат (y) каноническое уравнение

$$y_1 = p_1(|y'|), \quad 0 \leq y_1 \leq h, \quad (2)$$

а «основание» $B_1(h) = \overline{\Pi_1(M^0, h)} \cap \{y_1 = h\}$ лежит на $(n-1)$ -мерной гиперплоскости $y_1 = h$.

При $M = x$ и $M^0 = x^0$ будем пользоваться обозначениями

$$|xx^0|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2, \quad d_1(x) = |xx^0| \cos(M^0 p_1, M^0 M).$$

Определение 2. Оператор 2-го порядка (1) обладает относительно параболоида $\Pi_1(M^0, h)$ свойством (Ω) , если выполнены условия:

1) для любого вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $|\xi| = 1$ имеет место оценка

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq a^0 < +\infty, \quad x \in \Pi_1(M^0, h),$$

причем

$$|a_{ij}(x)| \leq A^0, \quad |a_i(x)| \leq A, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \\ -C \leq c(x) \leq 0, \quad x \in \Pi_1(M^0, h);$$

2) существует постоянная $\alpha_{12} > 0$ такая, что $\forall x \in \Pi_1(M^0, h)$ выполнено одно из двух условий:

$$\Omega_2(|xx^0|) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) N_i N_j \geq \alpha_{12} \Omega_1(|xx^0|) \quad (I)$$

или

$$d_1^{-1}(x) \Omega_2(d_1(x)) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) N_i N_j \geq \alpha_{12} |xx^0|^{-1} \Omega_1(|xx^0|), \quad (II)$$

где модуль непрерывности Ω_2 (как и модуль непрерывности Ω_1 , входящий в каноническое уравнение (2) для поверхности $P_1(M^0, h)$) удовлетворяет условию (A).

Если модуль непрерывности Ω_2 (из условий (I), (II)) удовлетворяет еще и условию Дини так, что сходится интеграл

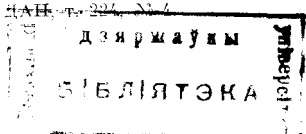
$$\int_0^{s_0} s^{-1} \Omega_2(s) ds,$$

то будем говорить, что оператор (1) обладает относительно параболоида $\Pi_1(M^0, h)$ свойством Д- (Ω) .

Замечание 1. Из оценок условий (I), (II) вытекает, что при выполнении свойства Д- (Ω) модуль непрерывности Ω_1 также удовлетворяет условию Дини.

Замечание 2. Если оператор (1) равномерно эллиптичен в параболоиде $\Pi_1(M^0, h)$, то он обладает относительно этого параболоида свойством Д- (Ω) с модулем непрерывности $\Omega_2 = \Omega_1$.

Замечание 3. Если $\Omega_2(s) = s^{\beta_2}$, $\Omega_1(s) = s^{\beta_1}$, $0 < \beta_2 < \beta_1 \leq 1$, то оператор (1), обладающий относительно $\Pi_1(M^0, h)$ свойством Д- (Ω) , допускает (при выполнении, например, условия (I)) слабое вырождение вблизи точки M^0



$$a^0 \geq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) N_i N_j \geq \alpha_{12} |xx^0|^{\beta_1 - \beta_2}, \quad x \in \Pi_1(M^0, h).$$

Определение 3. Граничная точка $M^0 \in \partial G$ обладает относительно области G свойством строгой параболоидности изнутри, если для нее существует параболоид вращения $\Pi_1(M^0, h)$ такой, что $\bar{\Pi}_1(M^0, h) \subset \bar{G}$, но $\bar{\Pi}_1(M^0, h) \cap \partial G = \{M^0\}$. Если при этом модуль непрерывности Ω_1 , входящий в каноническое уравнение (2) поверхности $P_1(M^0, h)$, удовлетворяет условию Дини, то будем говорить о свойстве строгой $\bar{D}$ -параболоидности изнутри.

Теорема типа Жиро. Пусть в компактной области $G \subset E_n$ определен оператор 2-го порядка (1) с неотрицательной характеристической частью, для которого выполнена оценка

$$-C \leq c(M) \leq 0, \quad M \in G.$$

Предположим, что для функции $u(M)$, граничной точки $M^0 \in \partial G$ и оператора (1) выполнены условия:

- 1) $u \in C(\bar{G}) \cap C^{(2)}(G)$, причем $Lu(M) \leq 0 \quad \forall M \in G$;
- 2) граничная точка $x^0 = M^0 \in \partial G$ обладает относительно области G свойством строгой $\bar{D}$ -параболоидности изнутри, причем оператор (1) обладает относительно параболоида $\Pi_1(M^0, h)$ свойством $\bar{D}(\Omega)$;
- 3) $u(x^0) = \mu \leq 0$, $u(x) > \mu \quad \forall x \in \bar{\Pi}_1(M^0, h) \setminus \{M^0\}$.

Тогда для любого направления $M^0 l$, входящего в параболоид $\Pi_1(M^0, h)$, имеет место оценка

$$\frac{\partial}{\partial l} u(x^0) = \lim_{x \rightarrow x^0, M^0 M \parallel M^0 l} \frac{u(x) - u(x^0)}{|xx^0|} > 0.$$

Контр-теорема типа Жиро. Пусть в параболоиде вращения $\Pi_1(M^0, h) \subset E_n$, $n \geq 2$, определен оператор 2-го порядка (1) с неотрицательной характеристической частью, для которого в $\Pi_1(M^0, h)$ имеет место (3). Предположим, что для функции $u(M)$, параболоида $\Pi_1(M^0, h)$ и оператора (1) выполнены условия:

- 1) $u \in C(\bar{\Pi}_1(M^0, h)) \cap C^{(2)}(\Pi_1(M^0, h))$, причем

$$Lu(M) = f(M) \leq 0, \quad |f(M)| \leq F < +\infty \quad \forall M \in \Pi_1(M^0, h);$$

- 2) $p_1''(s) \geq 0$, $s \in (0, s_0)$, где функция p_1 взята из канонического уравнения (2) поверхности $P_1(M^0, h)$;

- 3) если $\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x) \geq \dots \geq \lambda_n(x) \geq 0$ — собственные значения положительно полуопределенной квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j,$$

то существует постоянная $\alpha_{21} > 0$ такая, что

$$\Omega_1(|xx^0|) \sum_{i=2}^n \lambda_i(x) \geq \alpha_{21} \Omega_2(|xx^0|), \quad x \in \Pi_1(M^0, h), \quad (4)$$

где модуль непрерывности Ω_2 удовлетворяет условию (А), но не удовлетворяет условию Дини так, что

$$\int_0^{s_0} s^{-1} \Omega_2(s) ds = +\infty.$$

причем $\exists \beta \in (0, 1)$ такая, что

$$s^{\beta} = O(\Omega_2(s)), \quad s \rightarrow +0;$$

4) существует линейная функция

$$\Lambda(M) = \sum_{i=2}^n b_i y_i$$

такая, что в местной системе декартовых координат (y) , связанной с параболоидом $\Pi_1(M^0, h)$, имеет место оценка

$$|u(M) - u(M^0) - \Lambda(M)| \leq p_1(|y'|) \exp \left\{ - \int_{|y|}^{s_0} s^{-1} \Omega_2(s) ds \right\}$$

$$\forall M = y = (p_1(|y'|), y') \in P_1(M^0, h).$$

Тогда существуют постоянные $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ и $h_1 \in (0, h]$ такие, что

$$0 \leq u(M) - u(M^0) \leq \gamma_1 |M^0 M| \exp \left\{ - \gamma_2 \int_{u_1}^{s_0} s^{-1} \Omega_2(s) ds \right\}$$

$$\forall M(y_1, 0) \in \Pi_1(M^0, h), \quad M^0 M \| M^0 p_1;$$

при этом, в частности, имеем $du(M^0)/\partial M^0 p_1 = 0$.

Замечание 4. Контр-теорема типа Жиро остается в силе, если (при $n \geq 2$) условие (4) заменено на условия

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i(x) \geq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) N_i N_j$$

и

$$\Omega_1(|xx^0|) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) N_i N_j \geq \alpha_{21} \Omega_2(|xx^0|) \quad \forall x \in \Pi_1(M^0, h),$$

где модули непрерывности Ω_1 и Ω_2 не удовлетворяют условию Дяни.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
7 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ G. Giraud, Bull. Sci. Math., v. 60, 316 (1932). ² О. А. Олейник, Матем. сб., т. 30 (3), 695 (1952). ³ E. Hopf, Proc. Am. Math. Soc., v. 3, 791 (1952). ⁴ Р. Выборны, ДАН, т. 117, № 3, 563 (1957). ⁵ A. Friedman, Pacific J. Math., v. 8, 201 (1958). ⁶ Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко, ДАН, т. 200, № 2, 282 (1971). ⁷ Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко, Сиб. матем. журн., т. 13, № 4, 773 (1972). ⁸ Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко, ДАН, т. 204, № 3, 529 (1972). ⁹ Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко, Сиб. матем. журн., т. 14, № 1, 86 (1973). ¹⁰ Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко, ДАН, т. 212, № 3, 544 (1973). ¹¹ Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко, Сиб. матем. журн., т. 15, № 2, 343 (1974). ¹² Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко, В кн.: Теория кубатурных формул и применения функционального анализа к некоторым задачам математической физики, Новосибирск, «Наука», 1973, стр. 129. ¹³ Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко, ДАН, т. 219, № 4, 785 (1974).