

В. И. ЧЕРНОЛЯС

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КОРНЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННОГО  
ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ ПОРЯДКА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 24 III 1975)

В теории функций вполне регулярного роста (в.р.р.), построенной в 30-х годах Б. Я. Левиным и А. Пфлюгером <sup>(1, 2)</sup>, доказано, что необходимым и достаточным условием полной регулярности роста целой функции (ц.ф.) уточненного порядка  $\rho(r)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \ln \rho'(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho, \quad 0 < \rho < \infty, \quad (1)$$

является правильное распределение ее корней по лучам  $\arg z = \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Для случая нецелого  $\rho$  правильное распределение корней означает, что для всех  $\theta, \psi \in [-2\pi, 2\pi] \setminus N$  ( $\theta < \psi$ ,  $N$  не более чем счетно) существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} n_f(r, \theta, \psi) = \Delta_f(\theta, \psi), \quad (2)$$

где  $n_f(r, \theta, \psi)$  — число корней  $f(z)$  в секторе  $\{z: |z| \leq r, \theta \leq \arg z < \psi\}$ .

Полная регулярность роста характеризуется соотношением

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi, z \in L} |r^{-\rho(r)} \ln |f(re^{i\theta}) - a_k(\theta)|| = 0, \quad (3)$$

где  $h_f(\theta)$  — индикатор, а  $C$  есть множество кружков  $|z - a_k| \leq s_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , подчиненных условию

$$m^+(C) \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} \sum_{a_k \in C} s_k = 0. \quad (4)$$

С. К. Балашов обобщил <sup>(3)</sup> результаты Левина и Пфлюгера на случай правильного распределения корней по так называемым кривым правильного вращения (к.п.в.):

$$L_\varphi^r = \{z = r \exp i[\gamma(r) + \varphi], \quad 0 < r < \infty\}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

где

$$\operatorname{Im} \gamma(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \gamma'(r) = c, \quad -\infty < c < +\infty. \quad (5)$$

В частности, при  $\gamma(r) = c \ln r$  к.п.в.  $L^r$  для  $c = 0$  есть луч, а для  $c \neq 0$  — логарифмическая спираль.

Порядок  $\rho(r)$  по-прежнему берется уточненным (1), а условие (2) заменяется аналогичным:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} n_f^r(r, \theta, \psi) = \Delta_f^r(\theta, \psi), \quad \theta, \psi \notin N, \quad (6)$$

где  $n_f^r(r, \theta, \psi)$  — число корней  $f(z)$  в  $\bigcup_{0 \leq \varphi < \psi} L_\varphi^r \cap \{|z| \leq r\}$ .

Представляет интерес дальнейшее обобщение теории Левина — Пфлюгера на случай «колеблющегося» порядка  $\rho(r)$  \*:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r (\ln \rho'(r)) = 0, \quad [\rho] < \lambda = \lim \rho(r) \leq \lim \rho(r) = \rho < [\rho] + 1. \quad (7)$$

\* Случай когда  $0 < \lambda \leq [\rho] \leq \rho < \infty$ , не рассматривается ввиду ограниченности объема статьи. Всяду  $[\alpha]$  есть целая часть  $\alpha$ .

Впервые колеблющийся порядок (7) был введен П. Бутру. Ж. Валирон <sup>(4)</sup> рассмотрел при этом порядке частный случай, когда корни целой функции положительны и существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} n_f(r) = \Delta \geq 0, \quad n_f(r) \equiv n_f(r, 0, 2\pi).$$

При этом предположении установлено, что для всякого  $0 < \delta < \pi$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\delta \leq \theta \leq 2\pi - \delta} |r^{-\rho(r)} \ln f(re^{i\theta}) - \Delta \pi [\sin \rho(r) \pi]^{-1} e^{i\rho(r)[\theta - \pi]}| = 0. \quad (8)$$

Этот результат неоднократно применяется в <sup>(4)</sup>.

В данной статье при колеблющемся порядке (7) рассматривается общий случай распределения корней ц.ф. во всей плоскости, для которого строится аналог теории функций в р.р. Введем необходимые понятия.

**Определение 1.** Ограниченную функцию  $\varphi(r)$  назовем слабо меняющейся, если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{r/2 \leq t \leq 2r} |\varphi(r) - \varphi(t)| = 0.$$

Будем далее обозначать символом

$$u(r, \theta, \psi) \Rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty,$$

специальный вид сходимости по плоской мере на множестве  $a \leq \theta, \psi \leq b$ , если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\theta; \psi \in [a, b] \setminus E_r} |u(r, \theta, \psi)| = 0, \quad E_r \subset [a, b],$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \text{mes } E_r = 0.$$

**Определение 2.** Множество корней ц.ф.  $f(z)$  регулярно распределено с показателем  $\rho(r)$  (7), если функция  $n_f(r)r^{-\rho(r)}$  ограничена, а на множестве  $-2\pi \leq \theta, \psi \leq 2\pi$

$$\max_{r/2 \leq t \leq 2r} |r^{-\rho(r)} n_f(r, \theta, \psi) - t^{-\rho(t)} n_f(t, \theta, \psi)| \Rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty,$$

где  $n_f(r, \theta, \theta) \equiv 0$ ,  $n_f(r, \theta, \psi) = -n_f(r, \psi, \theta)$  при  $\theta > \psi$ .

Критерием регулярности распределения служит

**Теорема 1.** Корни ц.ф.  $f(z)$  тогда и только тогда регулярно распределены с показателем  $\rho(r)$ , когда существует функция вида  $\Delta(r, \theta, \psi) = \Delta(r, \psi) - \Delta(r, \theta)$ , для которой справедливы условия:

$$1) \quad \text{Var}_{-2\pi \leq \psi \leq 2\pi} \Delta(r, \psi) \leq C = \text{const};$$

2) на множестве  $-2\pi \leq \theta, \psi \leq 2\pi$

$$\max_{r/2 \leq t \leq 2r} |\Delta(r, \theta, \psi) - \Delta(t, \theta, \psi)| \Rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty,$$

$$|r^{-\rho(r)} n_f(r, \theta, \psi) - \Delta(r, \theta, \psi)| \Rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Функцию  $\Delta(r, \theta, \psi)$  целесообразно называть колеблющейся плотностью.

**Теорема 2.** Если  $\rho(r)$  — колеблющийся порядок и при некотором  $\gamma(r)$ , для которого в (5)  $c=0$ , существует предел (6), то множество корней ц.ф.  $f(z)$  регулярно распределено.

**Следствие.** Если множество корней ц.ф. правильно распределено, при  $\rho(r) \rightarrow \rho$ , то оно и регулярно распределено.

Обратное утверждение неверно. Например, если  $\{a_k\} \subset (0, \infty)$ ,  $\{a_k'\} \subset (-\infty, -e^{1/\rho})$ , а их считающие функции соответственно равны

$$n(r) = [r^\rho], \quad r > 0; \quad n_1(r) = [r^\rho(2 + \sin \ln \ln r)], \quad r > e^{1/\rho}; \quad \rho \neq [\rho];$$

то множество  $\{a_k\} \cup \{a_k'\}$  регулярно распределено при  $\rho(r) \equiv \rho$ , но не является правильно распределенным по любым к.п.в.,  $-\infty < c < +\infty$ , при каком угодно выборе  $\rho(r) \rightarrow \rho$ .

Таким образом, понятие регулярного распределения, даже при уточненном порядке  $\rho(r)$ , существенно обобщает известное понятие правильного распределения по к.в.в. при  $s=0$ , в частности, правильное распределение по лучам в смысле Левина — Пфлюгера.

Определение 3. Целая функция  $f(z)$  имеет обобщенный вполне регулярный рост (о.в.р.) колеблющегося порядка  $\rho(r)$ , если при каждом  $\theta$  существует такая слабо по  $r$  меняющаяся функция  $h_f(r, \theta)$ , равномерно ограниченная по  $r$  и  $\theta$ , что справедливо соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi, z \in C^0} |r^{-\rho(r)} \ln |f(re^{i\theta})| - h_f(r, \theta)| = 0. \quad (9)$$

Функцию  $h_f(r, \theta)$  назовем колеблющимся индикатором.

Подчеркнем, что индикатор ц.ф.  $f(z)$  о.в.р. не является единственным. В качестве примера колеблющегося индикатора приведем

$$h_f(r, \theta) = \max_{r/2 \leq t \leq 2r} t^{-\rho(t)} \ln |f(te^{i\theta})|.$$

Главным результатом статьи является

Основная теорема. Для того чтобы ц.ф.  $f(z)$  имела о.в.р. порядка  $\rho(r)$  (7), необходимо и достаточно, чтобы корни ее были регулярно распределены.

Эта теорема вытекает из результатов, которые приведены ниже.

Теорема 3. Пусть корни ц.ф.  $f(z)$  регулярно распределены с показателем  $\rho(r)$ . Тогда  $f(z)$  имеет о.в.р. с колеблющимся индикатором

$$h_f(r, \theta) = \pi [\sin \rho(r) \pi]^{-1} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} \cos[\rho(r)(\theta-\psi-\pi)] d_{\psi} \Delta(r, \psi), \quad (10)$$

где  $\Delta(r, \psi) = \Delta(r, \theta_0, \psi)$  — колеблющаяся плотность; в частности, можно полагать, что  $\Delta(r, \psi) = r^{-\rho(r)} n_f(r, \theta_0, \psi)$ .

При доказательстве теоремы 3 важную роль играют соотношение (8) и следующие леммы.

Лемма 1. Если корни  $f(z)$  регулярно распределены, то для любых  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $1 > \eta > 0$  найдется конечное множество  $M = M_{\varepsilon, \delta, \eta} \subset [-2\pi, 2\pi]$ , из которого для всякого  $r > r_{\varepsilon, \delta, \eta}$  можно выбрать подмножество  $M_r \subset M$  таких точек  $\psi_k$ ,  $k=1, 2, \dots, 2n$ , что для  $1 \leq k \leq n$ :  $-2\pi \leq \psi_k < 0$  и  $\psi_{n+k} = \psi_k + 2\pi$ ; для  $1 \leq k \leq 2n$ :  $\delta/2 \leq |\psi_{k+1} - \psi_k| \leq \delta$ , где доопределено  $\psi_{2n+1} = 2\pi$ ; и при  $r > r_{\varepsilon, \delta, \eta}$  справедлива оценка

$$\max_{1 \leq k \leq 2n-1} \max_{\eta r \leq t \leq r/\eta} |r^{-\rho(r)} n_f(r, \psi_k, \psi_{k+1}) - t^{-\rho(t)} n_f(t, \psi_k, \psi_{k+1})| \leq \varepsilon.$$

Лемма 2. Пусть  $\{a_k\}$  — последовательность со считающей функцией  $n(r)$ . Если величина  $r^{-\rho(r)} n(r)$  ограничена и слабо меняется, то для любых  $\varepsilon > 0$ ,  $\eta > 0$  можно так выбрать  $\delta > 0$ , что для всякой последовательности  $\{\tilde{a}_k\}$  ( $\tilde{a}_k = a_k \exp i\tilde{\theta}_k$ ,  $|\tilde{\theta}_k| \leq \delta$ ) найдется множество кружков  $C$ ,  $m^*(C^n) = \eta$  (4), такое, что при всех  $z \notin C^n$  и  $r > r_{\varepsilon}$  справедлива оценка

$$|\ln |V(re^{i\theta})| - \ln |\Gamma(re^{i\theta})|| \leq \varepsilon r^{-\rho(r)},$$

где

$$V(z) = \prod_1^{\infty} G\left(\frac{z}{a_k}; [\rho]\right), \quad \Gamma(z) = \prod_1^{\infty} G\left(\frac{z}{\tilde{a}_k}; [\rho]\right),$$

$$G(u, n) = (1-u) \exp \sum_{k=1}^n \frac{u^k}{k}.$$

Как и в теории функций в.р.р., имеет место

**Теорема 4.** Целая функция порядка  $\rho(r)$  (7) имеет о.в.р.р. тогда и только тогда, когда она удовлетворяет определению (3), в котором соотношение (9) заменено следующим:

$$\lim_{r \notin E^0, r \rightarrow \infty} \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |r^{-\rho(r)} \ln |f(re^{i\theta})| - h_f(r, \theta)| = 0, \quad (11)$$

где  $E^0$  — множество относительной меры нуль (<sup>1</sup>), стр. 127).

В следующей теореме утверждается, что у каждой функции о.в.р.р. существует колеблющийся индикатор, достаточно гладкий по  $r$  и  $\rho(r)$ -тригонометрически выпуклый по  $\theta$  (<sup>1</sup>), стр. 74).

**Теорема 5.** Пусть ц.ф.  $f(z)$  имеет о.в.р.р. Тогда можно построить такой колеблющийся индикатор  $H_f(r, \theta)$ , что:

1) функция  $H_f(r, \theta)$  на каждом  $r \geq r_0$   $\rho(r)$ -тригонометрически выпукла по  $\theta$ , а по  $r$  дифференцируема и подчинена условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| r \frac{\partial}{\partial r} H_f(r, \theta) \right| = 0;$$

2) ограниченная по  $r$  и по  $\theta$ ,  $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$ , функция

$$s_f(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} H_f(r, \theta) - \rho^2(r) \int_{-2\pi}^0 H_f(r, \varphi) d\varphi \quad (12)$$

определена для  $\theta \notin N$  ( $N$  фиксированное, счетное), и  $r \geq r_0$ , не убывает по  $\theta$  и дифференцируема по  $r$  с условием

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\theta \notin N, -2\pi \leq \theta \leq 2\pi} \left| r \frac{\partial}{\partial r} s_f(r, \theta) \right| = 0;$$

3) имеет место интегральное представление

$$H_f(r, \theta) = \pi [\sin \rho(r) \pi]^{-1} \int_{-2\pi}^0 \cos[\rho(r)(\theta - \psi - \pi)] d_\psi s_f(r, \psi).$$

**Теорема 6.** Если ц.ф.  $f(z)$  имеет о.в.р.р. колеблющегося порядка  $\rho(r)$  (7), то на множестве  $-2\pi \leq \theta, \psi \leq 2\pi$

$$|r^{-\rho(r)} n_f(r, \theta, \psi) - [s_f(r, \psi) - s_f(r, \theta)]| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty,$$

где  $s_f(r, \psi)$  — функция (12) из теоремы 5.

Основная теорема вытекает из теорем 1, 3 и 6.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н. В. Говорову за постановку задачи и внимание к этой работе.

Кубанский государственный университет  
Краснодар

Поступило  
24 III 1975

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956.  
<sup>2</sup> А. Pfluger, Math. Helv., В. 11, 180 (1938); В. 12, 25 (1938).  
<sup>3</sup> С. К. Балашов, ДАН, т. 209, № 3, 525 (1973).  
<sup>4</sup> А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Распределение значений мероморфных функций, М., «Наука», 1970.