

УДК 517.43

МАТЕМАТИКА

Ю. А. ШУБ-СИЗОНЕНКО

ОБ ОПЕРАТОРАХ ВАТСОНА СО СТЕПЕННЫМИ ЯДРАМИ

(Представлено академиком А. А. Дорожницыным 10 IV 1975)

1. Оператор Ватсона W с ядром $\psi(x)$ определяется формулой

$$Wf(x) = \frac{d}{dx} \left\{ x \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(xs) f(s) ds \right\}, \quad (1)$$

где $\psi(x)$ — вещественная функция, равная 0 при $x < 0$ и удовлетворяющая условию

$$\int_0^{\infty} \psi(sx) \psi(tx) dx = [\max(s, t)]^{-1}; \quad s > 0, \quad t > 0. \quad (2)$$

Основным отрезком ядра Ватсона назовем наименьший (конечный или бесконечный) отрезок, вне которого оно равно 0 почти всюду. Общие свойства вещественных операторов Ватсона изложены в ⁽¹⁾; там же рассматриваются ядра Ватсона вида $(-1)^n L_n(-\ln x)$ с основным отрезком $[0, 1]$ и $(-1)^n x^{-1} L_n(\ln x)$ с основным отрезком $[1, \infty)$, $n=0, 1, 2, \dots$, где $L_n(x)$ — полиномы Лагерра. Ниже будет показано, что эти ядра Ватсона являются предельным случаем одного класса так называемых степенных ядер Ватсона. В данной заметке излагаются основные свойства степенных ядер Ватсона и соответствующих им операторов.

2. Степенным ядром Ватсона с основным отрезком $[0, 1]$ будем называть ядро Ватсона $\psi(x)$, имеющее вид

$$\psi(x) = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k x^{v_k}, \quad 0 < x \leq 1, \quad (3)$$

где a_k , $k=0, 1, \dots, m$, — некоторые вещественные отличные от нуля коэффициенты, а вещественные показатели v_k , $k=1, \dots, m$, удовлетворяют условию

$$-1/2 < v_1 < v_2 < \dots < v_m. \quad (4)$$

Для определенности мы будем всегда считать $a_0 > 0$.

Теорема 1. *Существует единственное степенное ядро Ватсона (3), содержащее степени аргумента с произвольными показателями v_k , $k=1, \dots, m$, удовлетворяющими условию (4).*

Для доказательства исходим из того, что условие (2) в случае степенного ядра Ватсона (3) эквивалентно системе уравнений

$$\sum_{k=0}^m \frac{a_k a_0}{1 + v_k + v_l} = \begin{cases} 1 & \text{при } l=0, \\ 0 & \text{при } l=1, \dots, m, \end{cases} \quad (5)$$

не нужно считать $\nu_0=0$. Определителем Коши будем называть определитель вида $|(\alpha_i+\beta_k)^{-1}|_1^n$. Тождество, доказанное Коши ⁽²⁾, имеет вид

$$\left| \frac{1}{\alpha_i+\beta_k} \right|_1^n = \frac{\prod_{j>k}^{1,\dots,n} (\alpha_j-\alpha_k) (\beta_j-\beta_k)}{\prod_{j,k}^{1,\dots,n} (\alpha_j+\beta_k)}. \quad (6)$$

Остается заметить, что определитель системы (5) и все его миноры суть определители Коши; они положительны в силу (4) и (6).

Теорема 2. Сумма коэффициентов степенного ядра Ватсона (3) равна $(-1)^m$: $a_0+a_1+\dots+a_m=(-1)^m$.

Доказательство теоремы 2) основано на следующем предположении. Пусть в определителе Коши $\Delta=|(\alpha_i+\beta_k)^{-1}|_1^n$ числа α_i и β_k удовлетворяют таким условиям: $0<\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n$, $0\leq\beta_1<\beta_2<\dots<\beta_n$, $\alpha_j-\alpha_k=\beta_j-\beta_k$, $j, k=1, \dots, n$, $\alpha_1+\beta_1=1$. Пусть D_1 обозначает определитель, полученный из Δ заменой всех элементов первой строки единицами, а M_{11} — минор элемента определителя Δ , стоящего в его левом верхнем углу. Тогда

$$D_1=(-1)^{n-1}\sqrt{\Delta}\cdot\sqrt{M_{11}}.$$

3. Полным степенным ядром Ватсона $\psi_{n,\nu}(x)$ будем называть степенное ядро вида

$$\psi_{n,\nu}(x)=a_0+\sum_{k=1}^n a_k x^{k\nu}, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где $\nu>0$ и $a_k\neq 0$, $k=0, 1, 2, \dots, n$.

Теорема 3. Полное степенное ядро Ватсона выражается формулой

$$\psi_{n,\nu}(x)=\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(n+k+1+1/\nu)}{(n-k)! k! \Gamma(k+1+1/\nu)} x^{k\nu}. \quad (8)$$

Доказательство состоит в решении системы

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k a_0}{1+(k+l)\nu} = \begin{cases} 1 & \text{при } l=0, \\ 0 & \text{при } l=1, \dots, n \end{cases} \quad (9)$$

с использованием тождества (6).

Теорема 4. Полные степенные ядра Ватсона $\psi_{n,\nu}(x)$, $n=0, 1, \dots$, с основным отрезком $[0, 1]$ попарно ортогональны на этом отрезке с весом x^ν .

Принимая во внимание (9), непосредственным вычислением проверяем, что

$$\int_0^1 x^{(m+1)\nu} \psi_{n,\nu}(x) dx = 0$$

при $m<n$, откуда и следует теорема. Заметим, что система $\psi_{n,\nu}(x)$, $n=0, 1, 2, \dots$, полна в $\mathcal{L}_2(0, 1)$.

Теорема 5. При $\nu\rightarrow 0$:

- $\psi_{n,\nu}(x) \rightarrow (-1)^n L_n(-\ln x)$ в среднем на $[0, 1]$,
- $\psi_{n,\nu}(x) \rightarrow (-1)^n L_n(-\ln x)$ в обычном смысле при $0<x\leq 1$.

4. Полным полиномиальным ядром Ватсона с основным отрезком $[0, 1]$ назовем функцию $\psi_{n,1}(x)$, $n=0, 1, \dots$. Из (8) при $v=1$ получаем

$$\psi_{n,1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n+k+1)!}{(n-k)! k! (k+1)!} x^k. \quad (10)$$

Как следует из теоремы 4, полные полиномиальные ядра Ватсона (10) попарно ортогональны на $[0, 1]$ с весом x .

5. Пусть S обозначает оператор Ватсона с ядром $\psi^s(x)$, равным x^{-1} при $x \geq 1$ и нулю при $x < 1$.

Теорема 6. Функция

$$\psi_1(x) = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^{1+v_1}} + \frac{a_2}{x^{1+v_2}} + \dots + \frac{a_m}{x^{1+v_m}}, \quad (11)$$

где $-1/2 < v_1 < \dots < v_m$, есть ядро Ватсона с основным отрезком $[1, \infty)$ тогда и только тогда, когда она имеет вид $S\psi(x)$, где $\psi(x)$ есть степенное ядро Ватсона с основным отрезком $(0, 1)$.

Для доказательства достаточно составить систему уравнений для коэффициентов ядра (11), эквивалентную условию (2), и сравнить ее с (5).

6. Рассмотрим частный случай степенного ядра Ватсона (3) при $m=1$. По формуле (8) получаем

$$\psi_{1,v}(x) = \left(1 + \frac{1}{v}\right) - \left(2 + \frac{1}{v}\right)x^v, \quad 0 < x \leq 1. \quad (12)$$

Обозначим символом P_v оператор Ватсона, порожденный ядром $\psi_{1,v}(x)$.

7. Пусть $\psi^T(x)$ — ядро Ватсона, равное 1 при $0 \leq x \leq 1$ и нулю вне этого отрезка. Соответствующий оператор Ватсона будем обозначать символом T .

Если оператор Z может быть представлен разложением

$$Z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (TS)^n,$$

мы будем называть его $\mathcal{Z}$ -оператором. Ясно, что два любых $\mathcal{Z}$ -оператора коммутируют.

Оператор V , определяемый равенством

$$Vf(x) = \frac{d}{dx} \left\{ x \int_{-\infty}^{+\infty} k(xs) f(s) ds \right\},$$

где

$$k(x) \in \mathcal{L}_2(-\infty, \infty), \quad k(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < 0,$$

назовем $\mathcal{V}$ -оператором.

Как показано в (1), каждый $\mathcal{V}$ -оператор V может быть представлен разложением

$$V = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (TS)^n T.$$

Функцию комплексной переменной s

$$G_Z(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n s^n$$

будем называть TS -генератрисой оператора Z . Нетрудно проверить, что TS -генератриса оператора $P_v T$ есть $(\alpha + s)/(1 + \alpha s)$, где $\alpha = v^{-1} - 1$.

Введем для краткости письма обозначение

$$E(s, \alpha) = (\alpha + s)(1 + \alpha s)^{-1}.$$

8. Оператор Ватсона со степенным ядром (3) обозначим $P_{v_1, v_2, \dots, v_m}$.
Теорема 7.

$$P_{v_1, v_2, \dots, v_m} T = (P_{v_1} T) (P_{v_2} T) \dots (P_{v_m} T). \quad (13)$$

Для доказательства отметим, прежде всего, что сумме и произведению $\mathfrak{Z}$ -операторов соответствуют сумма и произведение их TS -генератрис. Таким образом, TS -генератриса оператора в правой части (13) есть

$$E(s, \alpha_1) E(s, \alpha_2) \dots E(s, \alpha_m),$$

где

$$\alpha_k = \frac{v_k}{1 + v_k}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Справедлива формула разложения произведения элементарных генератрис $E(s, \alpha)$:

$$\prod_{k=1}^m E(s, \alpha_k) = (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^m \left[\prod_{j \neq k} E\left(-\frac{1}{\alpha_j}, \alpha_k\right) \right] E(s, \alpha_k) + \frac{1 + (-1)^n}{2}. \quad (14)$$

Таким образом, TS -генератриса оператора в правой части (13) есть линейная комбинация TS -генератрис операторов $P_{v_1} T, \dots, P_{v_m} T$.

Далее видно, что $\mathfrak{Z}$ -оператор $(P_{v_1} T) \dots (P_{v_m} T) T$ имеет ядро, являющееся линейной комбинацией ядер $\psi_{1, v_1}(x), \dots, \psi_{1, v_m}(x)$, т. е. содержит степени аргумента $x^0, x^1, \dots, x^{v_m}$ и только их.

Из общей теоремы о произведениях операторов Ватсона, содержащейся в (1), следует, что $(P_{v_1} T) \dots (P_{v_m} T) T$ есть оператор Ватсона. По теореме 1 оператор Ватсона с ядром, содержащим $x^0, x^{v_1}, \dots, x^{v_m}$, единственный.

Поступило
19 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. А. Бастаршев. ДАН. т. 220, № 4, 761 (1975). ² А. L. Cauchy, Exercices d'analyse et de phys. math., v. 2 Paris, Bachelier, 1844, p. 151.