

В. А. КИСЕЛЕВ

МЕТОД СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ И СЛУЧАЙНЫХ ПАРАМЕТРАХ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 25 VII 1973)

Рассматривается класс нестационарных систем автоматического управления (с.а.у.), поддающихся аналитическому исследованию — с.а.у., описываемые обыкновенным дифференциальным уравнением типа Лапласа

$$\sum_{k=0}^n (\alpha_k + \beta_k t) y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m \mu_k x^{(k)}(t),$$

α_k, β_k, μ_k — вещественные постоянные, например, ⁽¹⁾, и его дискретным аналогом ⁽²⁾. Общая модель рассматриваемых с.а.у. приведена на рис. 1, где A — стационарное звено с.а.у., $\bar{t}$ — текущее время, $\bar{t}_0$ — время всего процесса. В случае построения с.а.у. с ЦВМ либо в случае дискретного поступления информации о входном сигнале стационарное звено системы представляет собой АИСЦ ⁽³⁾. Эти системы обычно функционируют на конечном промежутке времени $t \in [0, \bar{t}_0]$; к ним можно отнести системы управления сближением объектов различных классов в воде, воздухе, космическом пространстве и др.

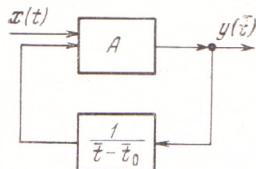


Рис. 1

В работе излагается метод синтеза импульсных систем. Пусть существует с.а.у. с импульсной переходной функцией стационарного звена — $\Phi(n, \epsilon)$ — предельная с.а.у. В зависимости от постановки задачи синтеза предельная с.а.у. может быть либо оптимальной (методы синтеза известны ^(3, 4)), либо системой, обладающей желаемыми динамическими характеристиками. Стационарное звено синтезируемой с.а.у. $\Phi^*(q, \epsilon | \mu)$ содержит параметры $\mu_k, k=1, 2, \dots, l$, имеющие случайные пекоррелированные с входным сигналом вариации относительно своих математических ожиданий. Ставится задача максимально приблизить статистические характеристики выхода с.а.у. к статистическим характеристикам выхода предельной с.а.у. надлежащим подбором параметров либо корректирующих устройств изменяемой части стационарного звена. В качестве критерия близости статистических характеристик выхода систем предлагается абсолютная величина K -го момента по совокупности отклонения условных статистических характеристик выхода с.а.у. от статистических характеристик предельной системы $|M[m_-(n, \epsilon | \mu) - m_-(n, \epsilon)]^k|$ и $|M[K_-(n_1, \epsilon_1, n_2, \epsilon_2 | \mu) - K_-(n_1, \epsilon_1, n_2, \epsilon_2)]^k|, k=1, 2, \dots$, где $m_-(n, \epsilon | \mu), K_-(n_1, \epsilon_1, n_2, \epsilon_2 | \mu)$ — условное математическое ожидание и корреляционная функция выхода с.а.у., μ — вектор случайных параметров. Этот критерий учитывает влияние как случайных воздействий, так и случайных параметров синтезируемой с.а.у. и позволяет построить метод синтеза, предложенный в статье.

Согласно методу, задача оптимизации критерия заменяется оптимизацией его оценок сверху $M[\Delta_m(n, \varepsilon | \mu)]^k$ и $M[\Delta_K(n_1, \varepsilon_1, n_2, \varepsilon_2 | \mu)]^k$, являющихся функциями оценок близости импульсных переходных функций стационарных звеньев систем. Это обстоятельство позволяет синтезировать с.а.у. данного класса методами, разработанными для стационарных с.а.у. со случайными параметрами.

Оценки строятся на основе явного выражения решения уравнения, описывающего процесс. Интегральное представление решения задачи Коши ⁽²⁾ при нулевых начальных условиях может быть записано в виде

$$y(n, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n x(k, 0) A_v(n, \varepsilon, k), \quad A_v(n, \varepsilon, m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{v-i\pi}^{\pm i\pi} e^{q(n-m)} T_v^*(n, \varepsilon, q) dq, \quad (1)$$

$$T_v^*(n, \varepsilon, q) = \overline{\Phi}^*(q, \varepsilon) + T_v^*(q, 0) e^{-(n-\bar{t}_0)q} \int_{-\infty}^q e^{(n-\bar{t}_0)\eta} \Phi^*(\eta) \overline{\Phi}^*(\eta, \varepsilon) d\eta, \quad (2)$$

— параметрическая передаточная функция с.а.у. $\bar{t}_0 = t_0/T$, T — период повторения импульсов.

$$T_v^*(q, 0) = \Phi^*(q, 0) \Phi^{*-1}(q), \quad \Phi^*(q, 0) = \frac{1}{T} \overline{\Phi}^*(q, 0), \quad \Phi^*(q) = \exp \int_q^\infty \Phi^*(\eta, 0) d\eta, \quad (3)$$

$\overline{\Phi}^*(q, \varepsilon)$ — передаточная функция стационарного звена — дробно-рациональная функция относительно e^q , $\overline{\Phi}^*(q, 0) \sim O(e^{-vq})$, $v \geq 1$, в полуполосе $\text{Re } q \geq \gamma$.

Т е о р е м а. Пусть существует случайный оператор с.а.у. $A_v(n, \varepsilon, m | \mu)$. Стационарное звено $\overline{\Phi}^*(q, \varepsilon)$ — изменяемое. Входной сигнал является случайным процессом $x(n, \varepsilon)$ с $t_+(n, \varepsilon)$ и $K_+(n_1, \varepsilon_1, n_2, \varepsilon_2)$. Для моментов времени $n + \varepsilon$, $n_1 + \varepsilon_1$, $n_2 + \varepsilon_2 < \bar{t}' < \bar{t}_0$, существуют оценки критериев близости статистических характеристик выхода синтезируемой $A_v(n, \varepsilon, m | \mu)$ и предельной $A_{v*}(n, \varepsilon, m)$ с.а.у., являющиеся функциями оценок близости импульсных переходных функций стационарных звеньев с.а.у. $|\Phi(n, 0 | \mu) - \Phi_*(n, 0)| < \varepsilon_0(0 | \mu) \varepsilon(n, 0)$ и $|\overline{\Phi}(n, \varepsilon | \mu) - \overline{\Phi}_*(n, \varepsilon)| < \varepsilon_0(\varepsilon | \mu) \varepsilon_1(n, \varepsilon)$, $\varepsilon_0(0 | \mu)$ и $\varepsilon_0(\varepsilon | \mu) = \text{const}$ при фиксированном векторе случайных параметров μ , $\varepsilon(n, 0)$ и $\varepsilon_1(n, \varepsilon)$ — функции, преобразуемые по Лапласу, $\varepsilon^*(q, 0) \underset{q \rightarrow \infty}{\sim} O(e^{-vq})$, $v > 0$, $\varepsilon_1^*(q, \varepsilon) \underset{q \rightarrow \infty}{\sim} O(e^{-\eta q})$, $\eta \geq 0$, $\text{Re } q \geq \gamma$,

$$M[\Delta_m(n, \varepsilon | \mu)]^k = M \left[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n |m_+(k, 0) | \Delta_{A_v(i)}(n, \varepsilon, k | \mu) |^k \right], \quad (4)$$

$$M[\Delta_K(n_1, \varepsilon_1, n_2, \varepsilon_2 | \mu)]^k = M \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^k \sum_{m=0}^{n_1} \Delta_{A_v(i)} \sum_{k=0}^{n_2} \Delta_{A_v(k-i)} |K_+(m, k)| \right]^k, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{A_v(0)}(n, \varepsilon, m | \mu) &= |A_v^*(n, \varepsilon, m)|, \\ \Delta_{A_v(k)}(n, \varepsilon, m | \mu) &= \varepsilon_0(\varepsilon | \mu) \varepsilon_1(n-m, \varepsilon) \delta(k-1) + \\ &+ \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^{n-m} \delta_{T_v(i)}(n-m-k, 0) \frac{\varepsilon_0^i(0 | \mu)}{k-n+i} \Delta_{N(k-i)}(k, \varepsilon | \mu), \end{aligned}$$

$\delta(k)$ — обобщенная дельта-функция, $\Delta_{A_v(k)}(n, \varepsilon, m|\mu)$ — оценка модуля K -ой вариации $A_v(n, \varepsilon, m|\mu)$ при фиксированном векторе μ относительно $A_v^*(n, \varepsilon, m)$,

$$\delta_{T_v(i)}(n, 0) = \sum_{k=0}^n |T_{v*}(n-k, 0)| \frac{1}{i!} \Lambda_{\cdot(i)}(k, 0) + \\ + \sum_{k=0}^n |\varphi_{\cdot}^{-1}(n-k, 0)| \frac{1}{i+1!} l_{\cdot(i-1)}(k, 0),$$

$\delta_{T_v(i)}(n, 0) = |T_v^*(n, 0)| \cdot \varepsilon_0^i(0|\mu) T \delta_{T_v(i)}(n, 0)$ — оценка модуля i -ой вариации сечения $A_v(n, \varepsilon, m|\mu)$ относительно сечения $A_{v*}(n, \varepsilon, m)$ для момента времени $n = \bar{t}_0$,

$$\Delta_{N(k)}(n, \varepsilon|\mu) = \varepsilon_0^k(0|\mu) \sum_{m=0}^n |N^*(m, \varepsilon)| \frac{1}{k!} \Lambda_{\cdot(k)}(n-m, 0) + \\ + \varepsilon_0^{k-1}(0|\mu) \overline{\varepsilon_0}(\varepsilon|\mu) \sum_{m=0}^n |\varphi_{\cdot}(m, 0)| \frac{1}{k-1!} \bar{l}_{\cdot(k-1)}(n-m, \varepsilon),$$

$$N^*(q, \varepsilon) = \varphi^*(q) \bar{\Phi}^*(q, \varepsilon), \quad \Delta_{N(0)}(n, \varepsilon|\mu) = |N^*(n, \varepsilon)|,$$

$$\Lambda_{\cdot(i)}(n, 0) = \varepsilon(n, 0)/n,$$

$$\Lambda_{\cdot(k)}(n, 0) = \sum_{m=0}^n \Lambda_{\cdot(i)}(m, 0) \Lambda_{\cdot(k-i)}(n-m, 0),$$

$$l_{\cdot(k)}(n, 0) = \sum_{m=0}^n \varepsilon(n-m, 0) \Lambda_{\cdot(k)}(m, 0),$$

$$\bar{l}_{\cdot(k)}(n, \varepsilon) = \sum_{m=0}^n \varepsilon_1(m, \varepsilon) \Lambda_{\cdot(k)}(n-m, 0).$$

Доказательство. Предполагаем, что система устойчива при фиксированном векторе случайных параметров μ ⁽¹⁾.

Из (1) — (3) имеем

$$A_v(n, \varepsilon, m) = \bar{\Phi}(n-m, \varepsilon) + \sum_{k=0}^{n-m} T_v(n-m-k, 0) \frac{N(k, \varepsilon)}{n-k-\bar{t}_0}, \quad (6)$$

$$N^*(q, \varepsilon) = \varphi^*(q) \bar{\Phi}^*(q, \varepsilon).$$

Раскладываем $A_v(n, \varepsilon, m|\mu)$ в ряд по вариации $\Phi(n, 0|\mu)$ относительно $\Phi_{\cdot}(n, 0)$ при фиксированном векторе μ , следуя изложенному в ⁽⁵⁾ для непрерывных с.а.у. $A_v(n, \varepsilon, m|\mu) = A_{v*}(n, \varepsilon, m) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{v(k)}(n, \varepsilon, m|\mu)$, вариации $A_{v(k)}(n, \varepsilon, m|\mu)$ зависят от функций $\Lambda_k(n, 0|\mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \Lambda_1(m, 0|\mu) \Lambda_{k-1}(n-m, 0|\mu)$, $\Lambda_0(n)$ — обобщенная дельта-функция,

$$\Lambda_1(n, 0|\mu) = \frac{\Delta \Phi(n, 0|\mu)}{n}, \quad l_k(n, 0|\mu) = \sum_{m=0}^n \Delta \Phi(m, 0|\mu) \Lambda_k(n-m, 0|\mu),$$

$$\bar{l}_k(n, \varepsilon | \mu) = \sum_{m=0} \Delta \bar{\Phi}(m, \varepsilon | \mu) \Lambda_k(n-m, 0 | \mu), \quad (7)$$

$$\Delta \bar{\Phi}(n, \varepsilon | \mu) = \bar{\Phi}(n, \varepsilon | \mu) - \bar{\Phi}_*(n, \varepsilon), \quad \Delta \Phi(n, 0 | \mu) = \Phi(n, 0 | \mu) - \Phi_*(n, 0).$$

Учитывая (7) и условие теоремы, имеем

$$|\Lambda_k(n, 0 | \mu)| < \varepsilon_0^k(0 | \mu) \Lambda_{*(k)}(n, 0), \quad |\bar{l}_k(n, \varepsilon | \mu)| < \varepsilon_0(\varepsilon | \mu) \varepsilon_0^k(0 | \mu) \bar{l}_{*(k)}(n, \varepsilon), \\ |l_k(n, 0 | \mu)| < \varepsilon_0^{k+1}(0 | \mu) l_{*(k)}(n, 0), \quad (8)$$

$\varepsilon_0(0 | \mu)$, $\varepsilon_0(\varepsilon | \mu)$ — вообще говоря, ограниченные постоянные в силу предположения устойчивости системы, относительно $\Lambda_{*(k)}(n)$, $\bar{l}_{*(k)}(n, \varepsilon)$, $l_{*(k)}(n)$, см. теорему. Оценивая (6) по модулю с учетом (8), имеем $A_{v(k)}(n, \varepsilon, m | \mu) < |A_{v(k)}| < \Delta_{A_{v(k)}}(n, \varepsilon, m | \mu)$, относительно $\Delta_{A_{v(k)}}(n, \varepsilon, m | \mu)$, см. теорему. Таким образом, построен ряд, сходящийся во всяком случае на интервале $n + \varepsilon \in [0, \bar{l}']$ и мажорирующий $A_v(n, \varepsilon, m | \mu)$. Отсюда, учитывая неотрицательность операции осреднения, легко получить оценки (4) и (5).

З а м е ч а н и е. При приближенном формулировании критериев близости минимизация оценок может быть сведена к минимизации конечной суммы моментов оценок близости стационарных звеньев систем. То обстоятельство, что оценки близости стационарных звеньев систем могут быть выражены через суммарные квадратичные функционалы, а для непрерывных с.а.у. через обобщенные интегральные квадратичные функционалы⁽⁶⁾, открывает весьма широкие возможности синтеза систем со случайными параметрами. Дело в том, что в настоящее время хорошо разработаны как методы исследования стационарных с.а.у. на основе суммарных квадратичных функционалов (обобщенных интегральных квадратичных функционалов), так и методы решения различных задач оптимизации стационарных с.а.у. со случайными параметрами по квадратичным критериям, в известной степени адекватных задачам оптимизации по суммарным квадратичным функционалам (обобщенным интегральным квадратичным функционалам).

Для осуществления оптимизации в общем случае моменты оценок линейризуются по суммарным квадратичным функционалам относительно их значений при $\mu = m$, m — вектор математических ожиданий случайных параметров. Оптимальный выбор параметров и синтез корректирующих звеньев проводится методами, разработанными для стационарных систем, (см. например, ^(3, 6-10) и др.).

Автор благодарит акад. Б. Н. Петрова за внимание к работе.

Поступило
24 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Т. Барабанов, Автомат. и телемех., № 6 (1969). ² А. Т. Барабанов, Тр. V Всемирного конгресса ИФАК, Париж, июнь, 1972, ч. IV. ³ Я. З. Дыпкин, Теория линейных импульсных систем, М., 1963. ⁴ В. С. Пугачев, Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, М., (1967). ⁵ В. А. Киселев, ДАН, т. 190, № 6 (1970). ⁶ А. А. Фельдбаум, Электрические системы автоматического регулирования, М., 1957. ⁷ P. E. Fleischer, I.R.E. Trans., v. AC-7, March, 1962. ⁸ P. С. Ругман, Техническая кибернетика, № 4 (1965). ⁹ Richard A. Volz, Proc. Nat. Electron. Conf., v. 20, Chicago, I, 1964. ¹⁰ П. С. Марвеев, А. С. Синицын и др., Сборн. Автоматическое управление и вычислительная техника, в. 8 (1968).