

В. Г. КРАВЧЕНКО

О СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ СО СДВИГОМ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 29 X 1973)

1. Пусть Γ — простой замкнутый контур Ляпунова и $\alpha(t)$ — гомеоморфизм (сдвиг) Γ на себя, производная которого $\alpha'(t) \in H(\lambda)$ и отлична от нуля всюду на Γ . В пространстве $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, рассмотрим оператор

$$T = a(t)I + b(t)B_\alpha + c(t)S + d(t)B_\alpha S + D, \quad (1)$$

где коэффициенты оператора — непрерывные на Γ функции, I — тождественный оператор, D — вполне непрерывный,

$$B_\alpha \varphi(t) = \varphi[\alpha(t)], \quad S\varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Вопрос о точных границах применимости теорем Нётера к оператору (1) пока решен лишь в случае сдвига Карлемана, т. е. гомеоморфизма $\alpha(t)$, для которого при некотором $\alpha_n(t) = t$, $n > 1$, где $\alpha_n(t) = \alpha[\alpha_{n-1}(t)]$, $\alpha_0(t) = t$ (см. ^(1, 2)). В настоящей статье устанавливаются необходимые и достаточные условия нётеровости оператора (1) в предположении, что $\alpha(t)$ имеет конечное число неподвижных точек. Заметим, что оператор (1) с таким сдвигом своими свойствами существенно отличается от оператора (1) со сдвигом Карлемана.

Пусть $\alpha(t)$ сохраняет ориентацию и $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_l$ — неподвижные точки $\alpha(t)$ первой кратности: $\alpha(\tau_j) = \tau_j$, $j = 1, 2, \dots, l$. Не нарушая общности, считаем неподвижные точки занумерованными таким образом, чтобы контур Γ разбивался ими на l непересекающихся дуг: $\Gamma_1 = (\tau_1, \tau_2)$; $\Gamma_2 = (\tau_2, \tau_3)$; ...; $\Gamma_l = (\tau_l, \tau_1)$. Если $x(t), y(t)$ — непрерывные функции на Γ , то через $\sigma_{\alpha^p}(x, y)$ обозначим функцию, которая равна $x(t)$, если $|\alpha'(\tau_j)| \cdot |x(\tau_j)|^p > |y(\tau_j)|^p$ при всех $j = 1, 2, \dots, l$, равна $y(t)$, если $|\alpha'(\tau_j)| \cdot |x(\tau_j)|^p < |y(\tau_j)|^p$ при всех $j = 1, 2, \dots, l$, и равна 0 во всех остальных случаях.

Теорема 1. Для того чтобы оператор T был нётеров в пространстве $L_p(\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma_{\alpha^p}(a+c, b+d) \cdot \sigma_{\alpha^p}(a-c, b-d) \neq 0 \quad (2)$$

всюду на Γ . Причем в случае нётеровости оператора T

$$\text{ind } T = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{\sigma_{\alpha^p}(a-c, b-d)}{\sigma_{\alpha^p}(a+c, b+d)} \right\}_{\Gamma}. \quad (3)$$

В работах автора ^(3, 4) получены условия нётеровости и формула для вычисления индекса оператора T , действующего в пространстве $H(\lambda)$. Доказательство достаточности условий теоремы 1 и справедливости формулы (3) аналогично соответствующему доказательству этих работ.

Основной целью настоящей статьи является установление необходимости условий (2). Для этого предварительно докажем несколько вспомогательных предложений.

2. Рассмотрим оператор

$$A = u(t)B_\alpha - I,$$

где $u(t)$ — непрерывная, всюду отличная от нуля на Γ функция.

Для любой точки $t \in \Gamma_j$ итерационная последовательность $\{\alpha_n(t)\}$ сходится и ее пределом может быть только одна из неподвижных точек τ_j или τ_{j+1} . В дальнейшем, фиксируя некоторое j , для определенности будем предполагать, что $\lim \alpha_n(t) = \tau_{j+1}$. Тогда обязательно $\lim \alpha_{-n}(t) = \tau_j$, где $\alpha_{-n}(t)$ — гомеоморфизм, обратный $\alpha_n(t)$.

Пусть t_1, t_2, t_3 — некоторые точки Γ_j , удовлетворяющие условию: $(t_1, t_2) \subset (t_3, \alpha(t_3))$. На дуге (t_1, t_2) возьмем непрерывную функцию $\varphi(\tau)$ и положим

$$\bar{\varphi}(\tau) = \begin{cases} \varphi(\tau), & \tau \in (t_1, t_2), \\ 0, & \tau \in [t_3, \alpha(t_3)] \setminus (t_1, t_2). \end{cases}$$

Теперь распространим $\bar{\varphi}(\tau)$ на всю дугу Γ с помощью равенства

$$\psi(t) = \begin{cases} \bar{\varphi}(\tau) & t = \tau \in [t_3, \alpha(t_3)], \\ \frac{\bar{\varphi}(\tau)}{\prod_{h=0}^{n-1} u[\alpha_h(\tau)]}, & t = \alpha_n(\tau), \quad n > 0, \quad \tau \in [t_3, \alpha(t_3)], \\ \bar{\varphi}(\tau) \prod_{h=-1} u[\alpha_h(\tau)], & t = \alpha_n(\tau), \quad n < 0, \quad \tau \in [t_3, \alpha(t_3)], \\ 0, & t \notin \Gamma_j. \end{cases}$$

Множество таких функций $\psi(t)$, полученных из произвольных непрерывных на дуге (t_1, t_2) функций $\varphi(\tau)$, обозначим через $N_j(u)$.

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости следующей леммы.

Лемма 1. Если при некотором j

$$|u(\tau_j)|^p < |\alpha'(\tau_j)|, \quad |u(\tau_{j+1})|^p > |\alpha'(\tau_{j+1})|, \quad (4)$$

то $N_j(u) \subset L_p(\Gamma)$ и $AN_j(u) = 0$.

Легко видеть, что сопряженный оператор

$$A^* = \frac{\overline{u[\alpha_{-1}(t)]}}{|\alpha'(t)|} B_\alpha^{-1} - I.$$

Отсюда и из леммы 1 следует

Лемма 2. Если при некотором j

$$|u(\tau_j)|^p > |\alpha'(\tau_j)|, \quad |u(\tau_{j+1})|^p < |\alpha'(\tau_{j+1})|, \quad (5)$$

то $N_j(|\alpha'|/\bar{u}) \subset L_q(\Gamma)$ и $A^*N_j(|\alpha'|/\bar{u}) = 0$, где $1/p + 1/q = 1$.

3. Рассмотрим операторы

$$K_1 = u(t)B_\alpha - P, \quad K_2 = u(t)B_\alpha - Q,$$

где $P = \frac{1}{2}(I + S)$, $Q = \frac{1}{2}(I - S)$.

Лемма 3. Пусть $u(t) \neq 0$ всюду на Γ . Если при некотором j выполняется одно из условий (4) или (5), то каждый из операторов K_i , $i = 1, 2$, не нётеров.

Для определенности рассмотрим оператор K_1 . Предположим, что выполняется условие (4) и оператор K_1 нётеров. Тогда существует оператор K_1 такой, что $K_1 \cdot K_1 \simeq I$, где знак $\simeq$ означает равенство двух операторов с точностью до вполне непрерывного оператора ⁽⁵⁾. Далее, так как $K_1 \cdot K_2 \simeq uB_\alpha A$, то

$$P \simeq (\bar{K}_1 u B_\alpha - I) A. \quad (6)$$

Пусть $\tilde{x}(t)$ — некоторая непрерывная на Γ функция, отличная от нуля только на дуге $(t_3, \alpha(t_3))$ и равная единице на дуге (t_1, t_2) . Оператор $P\tilde{\chi}-\tilde{\chi}P$ вполне непрерывен и поэтому из (6) следует равенство

$$\chi P\tilde{\chi} \simeq \chi(K_1 u B_\alpha - I)A, \quad (7)$$

где $\chi(t)$ — характеристическая функция дуги (t_1, t_2) . Из (7) находим: $\chi P\chi N_j(u) \simeq 0$. А отсюда и из определения множества $N_j(u)$ следует, что сужение оператора P на $L_p(t_1, t_2)$ является вполне непрерывным оператором. Получено противоречие.

Остальные случаи аналогичны.

4. Вернемся к доказательству теоремы 1. Оператор T представим в виде $T = A_+P + A_-Q$, где $A_\pm = [a(t) \pm c(t)]I + [b(t) \pm d(t)]B_\alpha$.

Пусть $\sigma_{\alpha^p}(a+c, b+d) = 0$ (случай $\sigma_{\alpha^p}(a-c, b-d) = 0$ аналогичен), оператор I нётеров и $[a(t)+c(t)][b(t)+d(t)] \neq 0$ всюду на Γ . Из нётеровости оператора T следует нётеровость оператора $T_1 = A_+P + Q$, а из нётеровости T_1 в свою очередь следует нётеровость K_1 , где $u(t) = -(b(t)+d(t))/(a(t)+c(t))$. Однако при $\sigma_{\alpha^p}(1, u) = \sigma_{\alpha^p}(a+c, b+d) = 0$ нетрудно указать оператор $K_3 = \hat{u}(t)I - P$, который настолько мало по норме отличается от оператора K_1 , что остается нётеровым⁽⁸⁾, и для которого при некотором j выполняется одно из условий (4) или (5), а это противоречит лемме 3.

Случай, когда $[a(t)+c(t)][b(t)+d(t)]$ обращается в нуль в некоторых точках Γ , сводится к предыдущему.

Если функции $\sigma_{\alpha^p}(a \pm c, b \pm d)$ отличны от тождественного нуля, то доказательство проводится аналогично доказательству необходимости условий нётеровости сингулярного интегрального оператора без сдвига (см., например, ⁽⁹⁾), а также ⁽¹⁰⁾.

5. Пусть теперь $\alpha(t)$ изменяет ориентацию контура Γ и $\alpha_2(t)$ имеет конечное число неподвижных точек. Обозначим

$$\begin{aligned} x^\pm(t) &= (a(t) \pm c(t))(a[\alpha(t)] \mp c[\alpha(t)]), \\ y^\pm(t) &= (b(t) \mp d(t))(b[\alpha(t)] \pm d[\alpha(t)]). \end{aligned}$$

Теорема 2. Для того чтобы оператор T был нётеров в пространстве $L_p(\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma_{\alpha_2^p}(x^+, y^+) \cdot \sigma_{\alpha_2^p}(x^-, y^-) \neq 0$$

всюду на Γ . Причем в случае нётеровости оператора T

$$\text{ind } I = \frac{1}{4\pi} \left\{ \arg \frac{\sigma_{\alpha_2^p}(x^-, y^-)}{\sigma_{\alpha_2^p}(x^+, y^+)} \right\}_\Gamma.$$

Предположим, что $a^2(t) - c^2(t) \neq 0$ всюду на Γ . Тогда оператор

$$T' = \frac{1}{a^2(t) - c^2(t)} [a(t)I - c(t)S]$$

нётеров^(6, 7, 9) и потому оператор T нётеров одновременно с оператором $T_2 = T \cdot T' \simeq I + b_1(t)B_\alpha + d_1(t)B_\alpha S$, где коэффициенты $b_1(t)$ и $d_1(t)$ выражаются через коэффициенты оператора T . Если учесть, что операторы $I - Q(b_1 + d_1)B_\alpha P$ и $I - P(b_1 - d_1)B_\alpha Q$ непрерывно обратимы, а операторы $P(b_1 + d_1)B_\alpha P$ и $Q(b_1 - d_1)B_\alpha Q$ вполне непрерывны, то получим, что оператор T одновременно нётеров с оператором

$$\begin{aligned} T_3 &= [I - Q(b_1 + d_1)B_\alpha P] \cdot T_2 [I - P(b_1 - d_1)B_\alpha Q] \simeq \\ &\simeq I - (b_1(t) + d_1(t))(b_1[\alpha(t)] - d_1[\alpha(t)])B_\alpha^2 Q. \end{aligned}$$

Так как $B_{\alpha^2} = B_{\alpha_2}$ и $\alpha_2(t)$ сохраняет ориентацию контура Γ , то к оператору T_3 применима теорема 1. Этим завершается доказательство теоремы 2 в случае $a^2(t) - c^2(t) \neq 0$.

Случай обращения в нуль функции $a^2(t) - c^2(t)$ в некоторых точках контура Γ сводится к предыдущему.

В заключение выражаю благодарность Г. С. Литвинчуку и Ю. И. Карловичу за ряд ценных указаний.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило
25 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. С. Литвинчук, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 31, 563 (1967). ² Г. С. Литвинчук, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 32, 1414 (1968). ³ В. Г. Кравченко, ДАН, т. 201, № 6, 1275 (1971). ⁴ В. Г. Кравченко, Укр. матем. журн., т. 24, 6, 752 (1972). ⁵ Ф. В. Аткинсон, Матем. сборн., т. 28 (70), 1 (1951). ⁶ Ф. Д. Газов, Краевые задачи, М., 1963. ⁷ Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», 1968. ⁸ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, УМН, т. 12, 2 (74), 43 (1957). ⁹ И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Матем. исследов., Кишинев, т. 3, 1, 16 (1968). ¹⁰ М. Г. Крейн, УМН, т. 13, 3, 3 (1948).