

К. О. КУРБАНОВ

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ, ХАРАКТЕРИЗУЕМЫХ СФЕРИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 23 X 1973)

1. Пусть S обозначает конечную плоскость $|z| < \infty$ и Ω — расширенную комплексную плоскость. Обозначим через $\chi(z_1, z_2)$ хордальное расстояние между точками $z_1, z_2 \in \Omega$. Рассмотрим мероморфную в S функцию $f(z)$ и пусть $z_v(f, a)$, $v=1, 2, \dots$, обозначает решение уравнения $f(z) - a = 0$, если a конечно, и уравнения $1/f(z) = 0$, если $a = \infty$. Через $\sigma(f(z))$ обозначим сферическую производную функции $f(z)$, $\sigma(f(z)) = |f'(z)| / (1 + |f(z)|^2)$.

Следуя классификации, предложенной в работе (1), будем говорить, что функция $f(z)$ принадлежит классу W_p , где $p \geq 1$ — действительное число, если

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z|^{2-p} \cdot \sigma(f(z)) < \infty.$$

Класс W_1 совпадает с классом мероморфных функций, исключительных в смысле Жюлиа. Класс W_2 рассматривался Жюлиа (2) и Иосида (3) (см. по этому поводу обсуждения в работе (4)).

Функции класса W_p можно охарактеризовать также в терминах последовательностей $M^{(p)}$ -точек. Последовательность точек $\{z_n\}$, $|z_n| \rightarrow \infty$, называют последовательностью $M^{(p)}$ -точек для функции $f(z)$, если для любой бесконечной подпоследовательности $\{z_{n_v}\} \subset \{z_n\}$ и произвольного $\varepsilon > 0$ в объединении

$\bigcup_{v=1}^{\infty} \{|z - z_{n_v}| < \varepsilon \cdot |z_{n_v}|^{2-p}\}$ функция $f(z)$ принимает бесконечно

часто все значения из Ω , кроме, быть может, двух. Функция $f(z)$ принадлежит классу W_p в том и только в том случае, когда $f(z)$ не обладает ни одной последовательностью $M^{(p)}$ -точек (см. (1, 4)).

2. Класс W_p не является инвариантным относительно операций сложения и умножения. В этой связи представляют интерес следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $f(z)$ и $g(z)$ принадлежат классу W_p . Для того чтобы сумма $h(z) = f(z) + g(z)$ принадлежала W_p , необходимо и достаточно выполнение следующего свойства:

для произвольных двух последовательностей $\{z_n\}, \{z'_n\}$, $|z_n| \rightarrow \infty$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_n - z'_n|}{|z_n|^{2-p}} = 0, \text{ из условий}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n) = a$$

(a конечно или бесконечно) следует $\lim_{n \rightarrow \infty} h(z'_n) = a$.

Доказательство. Необходимость условий теоремы имеет место на основании теоремы 4 из (4) (случай $a = \infty$). Чтобы доказать достаточность условий, с учетом рассуждений, приведенных в конце доказательства теоремы 3 из (5), нужно показать, что для любых двух последовательностей

$\{z_n\}, \{z_n'\}, |z_n| \rightarrow \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_n - z_n'|}{|z_n|^{2-p}} = 0$, из условия $\lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n) = a$ следует $\lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n') = a$. Можно считать, что существуют $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = b, \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = c$. Согласно теореме 4 из (4) (случай $a = \infty$), имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n') = b$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n') = c$. Если хотя бы одно из чисел b и c конечно, то $\lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n') = b + c = a$. Если b и c бесконечны, то $\lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n') = a$ в силу условий теоремы.

Аналогично доказывается

Теорема 2. Пусть $f(z)$ и $g(z)$ принадлежат классу W_p . Для того чтобы произведение $h(z) = f(z) \cdot g(z)$ принадлежало классу W_p , необходимо и достаточно выполнение следующего свойства:

для произвольных двух последовательностей $\{z_n\}, \{z_n'\}, |z_n| \rightarrow \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_n - z_n'|}{|z_n|^{2-p}} = 0$, из условий

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = \infty \quad (\text{или} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = 0) \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(z_n) = a$$

(a конечно или бесконечно) следует $\lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n') = a$.

3. Следующие факты касаются поведения функции на последовательностях $M^{(p)}$ -точек.

Теорема 3. Пусть $f(z)$ и $g(z)$ принадлежат классу W_p . Если сумма $h(z) = f(z) + g(z)$ не принадлежит W_p , то для любой последовательности $M^{(p)}$ -точек $\{z_n\}$ функции $h(z)$ выполняется $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = \infty$.

Теорема 4. Пусть $f(z)$ и $g(z)$ принадлежат классу W_p . Если произведение $h(z) = f(z) \cdot g(z)$ не принадлежит W_p , то $f(z)$ и $g(z)$ не могут быть одновременно ограниченными на любой последовательности $M^{(p)}$ -точек функции $h(z)$.

Следствие 1. Пусть $f(z)$ и $g(z)$ удовлетворяют условиям теоремы 4. Тогда существует такая последовательность точек $\{z_n\}, |z_n| \rightarrow \infty$, что либо

$$1^0) \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = \infty, \text{ либо}$$

$$2^0) \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = 0.$$

4. Иосида (3) доказал, что $f(z)$ принадлежит W_2 в том и только в том случае, если для любой последовательности точек $\{z_n\}$ семейство функций

$$\{f_n(z)\} = \{f(z + z_n)\} \quad (*)$$

нормально на любом компакте из C .

Пусть $f(z)$ принадлежит W_2 . Будем говорить, что $f(z)$ принадлежит W_2^0 , если соответствующие семейства (*) не имеют тождественных постоянных в качестве предельных функций. Свойства функций из W_2^0 изучались Жюлиа (2), Иосида (3) и Гавриловым (6).

Теорема 5. Для того чтобы $f(z)$ принадлежала W_2^0 , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) существует такое число $\alpha > 0$, что любой круг из C радиуса α содержит по крайней мере одну точку $z_\nu(f, 0)$ и $z_\mu(f, \infty)$;

$$2) \inf_{\substack{\nu=1, 2, \dots \\ \mu=1, 2, \dots}} |z_\nu(f, 0) - z_\mu(f, \infty)| > 0;$$

3) для любого $\beta > 0$ существует такое число $m > 0$, что

$$\chi(f(z), \infty) > m, \quad \text{когда } z \in C - \bigcup_{\mu=1}^{\infty} \{|z - z_\mu(f, \infty)| < \beta\},$$

$$\chi(f(z), 0) > m, \quad \text{когда } z \in C - \bigcup_{\mu=1}^{\infty} \{|z - z_v(f, 0)| < \beta\}.$$

Приведем доказательство теоремы 5, выделив в виде леммы основной этап этого доказательства.

Лемма 1. Если $f(z)$ принадлежит W_2^0 , то для любого комплексного числа a и любого $\alpha > 0$ существует такое число $m > 0$, что $\chi(f(z), a) > m$, когда $z \in C - \bigcup_{v=1}^{\infty} \{|z - z_v(f, a)| < \alpha\}$

Согласно теоремам 6, 2 из (3) и лемме 1, каждая функция из W_2^0 обладает свойствами 1), 2) и 3) теоремы 5. Для доказательства достаточности условий теоремы возьмем произвольную последовательность точек $\{z_n\}$, $\{z_n\} \rightarrow \infty$, положим $f_n(z) = f(z + z_n)$ и докажем, что $\{f_n(z)\}$ нормально в произвольной фиксированной точке $z_0 \in C$. Обозначим $t_n = z_0 + z_n$ и рассмотрим два случая:

$$1^0) \inf_{\substack{n=1, 2, \dots \\ \mu=1, 2, \dots}} |t_n - z_\mu(f, \infty)| > 0,$$

$$2^0) \inf_{\substack{n=1, 2, \dots \\ \mu=1, 2, \dots}} |t_n - z_\mu(f, \infty)| = 0.$$

В первом случае, выбирая δ_1 удовлетворяющим неравенствам

$$0 < \delta_1 < 1/2 \quad \inf_{\substack{n=1, 2, \dots \\ \mu=1, 2, \dots}} |t_n - z_\mu(f, \infty)|,$$

закключаем, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{|z - t_n| < \delta_1\} \subset C - \bigcup_{\mu=1}^{\infty} \{|z - z_\mu(f, \infty)| < \delta_1\}.$$

Согласно условию 3), функция $f(z)$ ограничена в $|z - t_n| < \delta_1$. Другими словами, $f_n(z)$ равномерно ограничены в $|z - z_0| < \delta_1$, $n = 1, 2, \dots$ и, следовательно, семейство $\{f_n(z)\}$ нормально в точке z_0 . Во втором случае существуют такие подпоследовательности $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ и $\{z_{\mu_k}(f, \infty)\} \subset \{z_\mu(f, \infty)\}$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} |t_{n_k} - z_{\mu_k}(f, \infty)| = 0$.

Из условия 2) теоремы следует, что $\inf_{\substack{h=1, 2, \dots \\ v=1, 2, \dots}} |t_{n_k} - z_v(f, 0)| > 0$.

Поэтому, выбирая δ_2 удовлетворяющим неравенствам

$$0 < \delta_2 < 1/2 \quad \inf_{\substack{h=1, 2, \dots \\ v=1, 2, \dots}} |t_{n_k} - z_v(f, 0)|,$$

получаем

$$\bigcup_{h=1}^{\infty} \{|z - t_{n_k}| < \delta_2\} \subset C - \bigcup_{v=1}^{\infty} \{|z - z_v(f, 0)| < \delta_2\}.$$

В силу условия 3) теоремы, существует такое число $m > 0$, что $\chi(f(z), 0) > m$ для всех $z \in \bigcup_{h=1}^{\infty} \{|z - t_{n_k}| < \delta_2\}$. Это значит, что для всех $k = 1, 2, \dots$ и всех $z \in \{|z - z_0| < \delta_2\}$ имеем $\chi(f_{n_k}(z), 0) > m$, где постоянная m не зависит от k . Следовательно, семейство $\{f_{n_k}(z)\}$ нормально в точке z_0 . Ни одна из предельных функций последовательности $\{f_{n_k}(z)\}$ не может быть тождественной постоянной в силу условия 1) теоремы.

Теорема 5 доказана полностью.

Следствие 2. Пусть $f(z)$ и $g(z)$ принадлежат W_2^0 и

$$\inf_{\substack{v=1, 2, \dots \\ \mu=1, 2, \dots}} |z_v(f, 0) - z_\mu(g, \infty)| > 0, \quad \inf_{\substack{\mu=1, 2, \dots \\ v=1, 2, \dots}} |z_\mu(f, \infty) - z_v(g, 0)| > 0.$$

Тогда $f(z) \cdot g(z)$ принадлежит W_2^0 .

З а м е ч а н и е 1. Для нормальных мероморфных функций, определенных в единичном круге, аналоги наших результатов доказаны в статьях (7-9).

В заключение автор пользуется случаем выразить благодарность В. И. Гаврилову, под руководством которого была выполнена эта работа.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. И. Гаврилов, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 32, № 4 (1968). ² G. Julia, Leçons sur les fonctions uniformes a point singulier essential isole, Paris, Gauthier — Villars, 1924. ³ K. Yosida, Proc. Phys.— Math. Soc. Japan, v. 16, № 7 (1934). ⁴ В. И. Гаврилов, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 30, № 4 (1966). ⁵ V. I. Gavrilov, Research Report № 2, Indian Institute of Tehnology, Bombay, India, 1969. ⁶ V. I. Gavrilov, Proc. Japan Akademy, v. 46, № 1 (1970). ⁷ K.-F. Tse, Comment. Matt. Univ. St. Pauli, v. 17, № 2 (1969). ⁸ D. W. Bash, Canadian J. Math., v. 24, № 2 (1972). ⁹ T. Zinno, Nagoya Math. J., v. 33 (1968).