

УДК 517. 947

МАТЕМАТИКА

Н. С. БАХВАЛОВ

ОСРЕДНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком С. М. Никольским 19 VI 1975)

В работе предлагается формальная процедура осреднения нелинейных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами. По отношению к линейному случаю ⁽¹⁾ получаемые результаты также являются новыми, поскольку охватывают более широкий класс уравнений и случай зависимости коэффициентов от медленных переменных. Методика осреднения имеет много общего с методикой ⁽¹⁻³⁾. Результаты работы имеют отношение к рассмотрению ряда вопросов теории периодических структур ⁽⁴⁻⁷⁾.

Пусть Φ_r^s — пространство матриц размерности $n \times \dots \times n$, элементы которых суть функции от аргументов ε , $X = (x_1, \dots, x_m)$, $Z = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, $u, w^{i_1, \dots, i_l}, 1 \leq l \leq s$, периодические по каждому из аргументов ξ_i с периодом 1;

$$u = (u_1, \dots, u_n)^T, \quad w^{i_1, \dots, i_l} = \varepsilon^{l-1} \frac{\partial^l u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_l}}.$$

Через Ω_r^s обозначаем пространство таких матриц, элементы которых суть функции от аргументов X, Z, v ,

$$v^{(i_1, \dots, i_l)} = \frac{\partial^l v}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_l}}, \quad 1 \leq l \leq s,$$

периодические по каждому из аргументов ξ_i с периодом 1, $v = (v_1, \dots, v_n)^T$. Ψ_r^s означает подпространство элементов из Ω_r^s , не зависящих от аргументов ξ_i . Положим

$$\Omega_r = \bigcup_s \Omega_r^s, \quad \Omega^s = \bigcup_r \Omega_r^s, \quad \Psi_r = \bigcup_s \Psi_r^s, \quad \Psi^s = \bigcup_r \Psi_r^s;$$

$$\{N\} = \int_{-0,5}^{0,5} \dots \int_{-0,5}^{0,5} N d\xi_1 \dots d\xi_m \quad \text{при } N \in \Omega_r^s.$$

Через $D^{(i_1, \dots, i_l)} f$ будем обозначать полную производную f по переменным $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$ при условии, что «быстрые» переменные ξ_i связаны с «медленными» переменными x_i соотношениями $\xi_i = x_i/\varepsilon$; ε — малый параметр, по которому производятся асимптотические разложения.

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$P(u) = \left(\frac{A}{\varepsilon} + \sum_{l=1}^q \varepsilon^{l-1} D^{(i_1, \dots, i_l)} A_{i_1, \dots, i_l} \right) \Big|_{\varepsilon_h = x_h/\varepsilon} = 0; \quad (1)$$

$$A_{i_1, \dots, i_l} \in \Phi_1^p;$$

если, как в (1), суммирование по повторяющимся индексам не отмечено знаком суммирования, то оно производится в пределах $[1, m]$.

В дальнейшем для простоты предполагается, что векторы $\mathbf{A}$ бесконечно дифференцируемы по своим аргументам.

В конкретных случаях часть этих требований снимается, в частности, за счет определения решения (1) как обобщенного по С. Л. Соболеву.

Асимптотическое разложение решения (1) отыскивается в виде

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v} + \sum_{0 < k} \varepsilon^k \mathbf{N}_k, \quad \mathbf{N}_k \in \Omega_1, \quad (2)$$

$\xi_k = x_k/\varepsilon$, $\mathbf{v}$ — решение осредненного уравнения. Разложим $\mathbf{P}(\mathbf{u})$ в асимптотический ряд по степеням ε ; на данном этапе $\mathbf{v}$ рассматривается как функция аргументов x_i , не зависящим от ε . После приведения подобных членов имеем

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}) \sim \sum_{0 < k} \varepsilon^{k-2} \mathbf{H}_k, \quad \mathbf{H}_k \in \Omega_1.$$

Потребуем выполнения соотношений

$$\mathbf{H}_1 = 0, \quad \mathbf{H}_k = \mathbf{h}_k \quad (3)$$

при $k > 1$; $\mathbf{h}_k \in \Psi_1$.

Уравнение

$$\mathbf{P}(\mathbf{v}) \sim \sum_{1 < k} \varepsilon^{k-2} \mathbf{h}_k \sim 0, \quad (4)$$

не содержащее быстрых переменных ξ_i , можно рассматривать как осреднение (1): если $\mathbf{v}$ удовлетворяет (4), то соответствующее, согласно (2), $\mathbf{u}$ удовлетворяет (1). Решение (4) можно искать в виде ряда по степеням ε

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{v}_2 + \dots$$

При $z \in \Phi_r^s$ обозначаем через $[z]$ элемент из Ω_r^s , получающийся при подстановке в z

$$\varepsilon = 0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{w}^i = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial \xi_i},$$

$$\mathbf{w}^{i_1, \dots, i_l} = \frac{\partial^l \mathbf{N}_1}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_l}} \quad \text{при } l > 1.$$

Имеем

$$\mathbf{H}_1 = [\mathbf{A}] + \sum_{l=1}^q \frac{\partial^l [\mathbf{A}_{i_1, \dots, i_l}]}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_l}}.$$

Далее предполагаем, что уравнение $\mathbf{H}_1 = 0$ имеет некоторое решение $\mathbf{N}_1 \in \Omega_1$. Заметим, что X , $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^{(i_1, \dots, i_l)}$ входят в это уравнение как параметры; $\mathbf{N}_1$ отыскивается как периодическое по $\xi_1, \dots, \xi_m$ с периодом 1 решение этого уравнения. При $k > 1$ имеем

$$\mathbf{H}_k = L_0 \mathbf{N}_k + \mathbf{W}_k,$$

$$L_0 \mathbf{N} = \sum_{l=0}^q \frac{\partial^l}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_l}} \left(\sum_{s=1}^p \left[\frac{\partial \mathbf{A}_{i_1, \dots, i_l}}{\partial \mathbf{w}^{j_1, \dots, j_s}} \right] \frac{\partial^s \mathbf{N}}{\partial \xi_{j_1} \dots \partial \xi_{j_s}} \right),$$

$\frac{\partial \mathbf{A}_{i_1, \dots, i_l}}{\partial \mathbf{w}^{j_1, \dots, j_s}}$ — якобиан, $\mathbf{W}_k$ определяется заданием $\mathbf{v}$, $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_{k-1}$. После определения $\mathbf{N}_1$ из условия $\mathbf{H}_1 = 0$ последовательно определяем $\mathbf{h}_2, \mathbf{N}_2, \mathbf{h}_3, \mathbf{N}_3, \dots$ по следующему алгоритму: всякий раз выбираем $\mathbf{h}_k$ так, чтобы уравнение

$\mathbf{h}_k = \mathbf{h}_k$ относительно $\mathbf{N}_k \in \Omega_1$ было разрешимо, затем находим из этого уравнения $\mathbf{N}_k$.

Рассмотрим типичный в приложениях случай, когда выполняется следующее условие: уравнение $L_0 \mathbf{N} = \mathbf{M}$, $\mathbf{M} \in \Omega_1$, разрешимо в классе $\mathbf{N} \in \Omega_1$, если $\{\mathbf{M}\} = 0$. Если каждый раз полагать $\mathbf{h}_k = \{\mathbf{W}_k\}$, то уравнение

$$L_0 \mathbf{N}_k + \mathbf{W}_k = \mathbf{h}_k = \{\mathbf{W}_k\}$$

будет удовлетворять требуемому условию разрешимости.

Если одна из независимых переменных, например, x_1 имеет смысл времени, то при физических интерпретациях осредненного уравнения желательно, чтобы оно не содержало дифференцирования по этой переменной порядка выше второго. Покажем, как получить осредненное уравнение, удовлетворяющее этому условию.

Векторы $\mathbf{N}_k$, получаемые последовательно как решения уравнений (3), определяются всякий раз неоднозначно: если $\mathbf{N}_k$ — решение соответствующего уравнения (3), то $\mathbf{N}_k + \mathbf{z}_k$, $\mathbf{z}_k \in \Psi_1$, также является его решением. Для определенности выбираем далее $\mathbf{z}_k$ так, чтобы выполнялось условие $\{\mathbf{N}_k\} = 0$.

Пусть T — пространство матриц S размерности $n \times \dots \times n$, r — всевозможные, представимых в виде прямого произведения векторов $\mathbf{v}^{(i_1, \dots, i_r)}$, $l > 1$. Наибольший из порядков дифференцирования по x_1 в этих векторах обозначаем через $g(S)$, сумму всех порядков дифференцирования l , соответствующих этим векторам, обозначим $b(S)$. Пусть T_k — подпространство матриц S , удовлетворяющих условию $b(S) \leq k$. Далее прямое произведение обозначается знаком $\circ$, свертка матриц не отмечается специальным знаком. Исследуя представление $\mathbf{W}_k$ через $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_{k-1}$ и вид уравнений (4), можно установить, что $\mathbf{N}_k$ и $\mathbf{h}_k$ записываются в виде

$$\mathbf{N}_k = \sum_j^{2k-2} N_{2k-2}^j S_j, \quad N_{2k-2}^j \in \Omega^1,$$

$$\mathbf{h}_k = \sum_j^{2k-2} h_{2k-2}^j S_j, \quad h_{2k-2}^j \in \Psi^1;$$

знак $\sum_j^l$ означает суммирование по $S_j \in T_l$. Таким образом, (4) имеет вид

$$\sum_{1 \leq k} \varepsilon^{k-2} \sum_j^{2k-2} h_{2k-2}^j S_j \sim 0.$$

Рассмотрим случай, когда матрица h_{2k-2}^j , стоящая множителем при $S_j = \partial^2 \mathbf{v} / \partial x_1^2$, обратима. Будем обозначать ее R .

Алгоритм преобразования (4) к требуемому виду содержит индукцию по совокупности параметров r и s : $2 < r$, $0 < s$; при этом по r переходим от меньших значений к большим, а по s — наоборот. Пусть (4) преобразовано к виду, не содержащему ненулевых членов $\varepsilon^{k-2} h_{2k-2}^j S_j$ при $k < r$, $1 < g(S_j)$ и при $k = r$, $s < g(S_j)$ (кроме члена $R \partial^2 \mathbf{v} / \partial x_1^2$). При $r = 3$, $s = 4$ предположение индукции выполнено.

Опишем шаг индукции по r , состоящий из шагов индукции по s . Среди матриц S_j с ненулевыми коэффициентами h_{2r-2}^j выберем одну из матриц с $g(S_j) = s$; переставляя индексы в соответствующей ей свертке $h_{2r-2}^j S_j$, представим ее в виде

$$\bar{h} S \circ \frac{\partial^{s+1} \mathbf{v}}{\partial x_1^s \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{s+1}}}, \quad i_2, \dots, i_{s+1} \neq 1.$$

Применим к (4) оператор Q , определяемый равенством

$$Q\mathbf{w} = \mathbf{w} - \varepsilon^{r-2} \bar{h} \bar{S} \circ \frac{\partial^{s+l-2} (R^{-1}\mathbf{w})}{\partial x_1^{s-2} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{l+1}}}.$$

Получится уравнение, асимптотически эквивалентное исходному; при этом общее число множителей

$$\frac{\partial^{s+l}\mathbf{v}}{\partial x_1^s \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{l+1}}}, \quad i_2, \dots, i_{l+1} \neq 1,$$

во всех матрицах $S_j \in T_{2r-2}$, входящих в уравнение с множителем ε^{r-2} , уменьшится по крайней мере на единицу. Продолжая этот процесс, получим уравнение, удовлетворяющее требованию индукции с на единицу меньшим значением s . Шаг индукции по s закончен. Продолжая эти шаги до $s=1$, получим уравнение, соответствующее на единицу большему r , т. е. заканчиваем шаг индукции по r . Переходя к пределу при $r \rightarrow \infty$, получим осредненное уравнение с единственным членом, содержащим дифференцирование по x_1 порядка выше первого: $R \partial^2 \mathbf{v} / \partial x_1^2$.

Иногда при построении осредненных уравнений, допускающих физическую интерпретацию, может оказаться целесообразным, как в (¹, ⁶), не обращать в нуль коэффициенты и при других матрицах S , содержащих дифференцирование по x_1 второго порядка.

Предлагаемая процедура осреднения формально (мы оставляем в стороне вопрос обоснования) применима и в случае $p, q = \infty$, соответствующем псевдодифференциальным уравнениям.

К классу линейных задач для псевдодифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами относятся задачи для периодических решетчатых структур (⁴, ⁵) и задачи для систем с распределенными параметрами (⁶). Отметим, что при $p, q=1$ для вариационных задач способ получения главной части (4) предложен в (³).

Автор выражает признательность М. Э. Эглит за полезные обсуждения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
17 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. С. Бахвалов, ДАН, т. 221, № 3 (1975). ² Н. П. Боголюбов, Ю. М. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., «Наука», 1974.
³ В. Л. Бердичевский, ДАН, т. 222, № 3 (1975). ⁴ М. Борн, Хуан Кунь, Динамическая теория решеток, М., ИЛ, 1958. ⁵ Л. Бриллюэн, М. Пароди, Распространение волн в периодических структурах, М., ИЛ, 1959. ⁶ И. А. Кулин, ПММ, т. 30, в. 5 (1966). ⁷ Н. С. Бахвалов, ДАН, т. 218, № 5 (1974).