

В. А. ДАУГАВЕТ, В. Н. МАЛОЗЕМОВ

АЛЬТЕРНАНСНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧ С НЕВЫПУКЛЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 1 IV 1975)

1. Рассматривается задача

$$\varphi(x) = \max_{y \in D} F(x, y) \rightarrow \min_{x \in \Omega},$$

где D — произвольный метрический компакт, $F(x, y)$ — функция, непрерывная вместе с $F'_x(x, y)$ на $E^n \times D$ и

$$\Omega = \{x \in E^n \mid h_j(x) \leq 0, \quad \forall j \in 1, \dots, m\}.$$

Предполагается, что функции h_j непрерывно дифференцируемы на E^n .

В заметке указаны в альтернансных терминах необходимые и достаточные условия локального минимума функции φ на Ω . В ⁽¹⁾ аналогичные результаты получены в случае отсутствия ограничений ($\Omega = E^n$). Некоторые необходимые условия локального минимума функции φ на Ω с помощью метода шатров установлены в ⁽²⁾.

2. Прежде всего напомним определение регулярности (первого порядка) ограничений в точке $x_0 \in \Omega$.

Вариацией точки x_0 называется любое гладкое отображение $\lambda \rightarrow v(\lambda)$ отрезка $[0, \varepsilon]$ в E^n такое, что $v(0) = x_0$. Вариация v считается допустимой, если $v(\lambda) \in \Omega$ при малых λ .

Пусть $\gamma(x_0)$ есть множество ненулевых векторов $g \in E^n$ таких, что существует допустимая вариация v точки x_0 , у которой $v'(0) = g$. Замыкание множества $\gamma(x_0)$ обозначим через $\Gamma(x_0)$.

Положим

$$B(x_0) = \{g \mid (\nabla h_j(x_0), g) \leq 0, \quad \forall j \in Q(x_0)\},$$

где $Q(x_0) = \{j \in 1, \dots, m \mid h_j(x_0) = 0\}$.

Нетрудно проверить, что $\Gamma(x_0) \subset B(x_0) \quad \forall x_0 \in \Omega$.

Определение. Говорят, что в точке $x_0 \in \Omega$ ограничения регулярны, если $\Gamma(x_0) = B(x_0)$.

Пусть, например, все функции h_j выпуклы и выполнено условие Слейтера. Тогда в любой точке $x_0 \in \Omega$ ограничения регулярны (см., например, ⁽³⁾, стр. 177). По поводу достаточных условий регулярности в случае невыпуклых ограничений см. ⁽⁴⁾, стр. 35—41.

3. Справедливы следующие два утверждения.

Теорема 1. Пусть x^* — точка локального минимума функции φ на Ω , причем ограничения в точке x^* регулярны.

Тогда найдутся

$$p+1 \text{ точек } y_0, y_1, \dots, y_p \text{ в } R(x^*) = \{y \in D \mid F(x^*, y) = \varphi(x^*)\},$$

$$q \text{ индексов } j_1, j_2, \dots, j_q \in Q(x^*), \quad p, q \geq 0,$$

$$\text{и } p+q+1 \text{ положительных чисел } \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q,$$

$$\sum_{i=0}^p \alpha_i = 1,$$

таких, что

$$\sum_{i=0}^p \alpha_i F_{x'}(x^*, y_i) + \sum_{s=1}^q \beta_s \nabla h_{j_s}(x^*) = 0, \quad (1)$$

причем векторы

$$F_{x'}(x^*, y_1) - F_{x'}(x^*, y_0), \dots, F_{x'}(x^*, y_p) - F_{x'}(x^*, y_0), \\ \nabla h_{j_1}(x^*), \dots, \nabla h_{j_q}(x^*) \quad (2)$$

линейно независимы.

Заметим, что в силу последнего условия $p+q \leq n$.

Теорема 2. Если для точки $x^* \in \Omega$ справедливо заключение теоремы 1 с $p+q=n$, то x^* является точкой строгого локального минимума функции φ на Ω . Более того, найдутся положительные числа δ и r такие, что

$$\varphi(x) \geq \varphi(x^*) + r \|x - x^*\| \quad \forall x \in U_\delta(x^*) \cap \Omega$$

($U_\delta(x^*)$ — открытый шар радиуса δ с центром в точке x^*).

Выполнение условия регулярности ограничений в точке x^* здесь не предполагается.

4. На основании теорем 1 и 2 удастся получить необходимые и достаточные условия локального минимума функции φ на Ω в альтернансных терминах.

Предварительно введем

Определение. Точка $x^* \in \Omega$ обладает обобщенным альтернансом, если существуют $p+1$ точек $y_0, y_1, \dots, y_p$ в $R(x^*)$ и q индексов $j_1, j_2, \dots, j_q$ в $Q(x^*)$, $p+q=n$, таких, что у матрицы $\mathcal{F}$, составленной из столбцов

$$F_{x'}(x^*, y_0), F_{x'}(x^*, y_1), \dots, F_{x'}(x^*, y_p), \nabla h_{j_1}(x^*), \dots, \nabla h_{j_q}(x^*),$$

все определители Δ_k подматриц, получающихся из $\mathcal{F}$ исключением k -го столбца, отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки.

Теорема 3. Для того чтобы $x^* \in \Omega$ была точкой строгого локального минимума функции φ на Ω , достаточно, чтобы она обладала обобщенным альтернансом.

Доказательство основано на том, что условия теорем 2 и 3 равносильны.

Необходимость обобщенного альтернанса получается при выполнении дополнительного условия.

Определение. Будем говорить, что точка $x^* \in \Omega$ обладает свойством T , если для любых $p+1$ точек $y_0, y_1, \dots, y_p$ из $R(x^*)$ и любых q индексов $j_1, j_2, \dots, j_q$ из $Q(x^*)$, $p, q \geq 0$, $p+q < n$, таких, что совокупность векторов (2) является линейно независимой, невозможно равенство (1) с положительными α_i и β_s .

Если $\Omega = E^n$ и D — компакт на вещественной оси, то свойство T имеет любая точка x^* , для которой система функций

$$\frac{\partial F(x^*, y)}{\partial x^1} \quad \frac{\partial F(x^*, y)}{\partial x^n} \quad (3)$$

будет чебышевской на D . Действительно, в этом случае равенство (1) невозможно даже при ненулевых α_i (заметим, что $p < n$). Таким образом, в этой классической ситуации условие на точку x^* обладать свойством T является, вообще говоря, более слабым, чем обычно встречающиеся требования к системе (3) быть чебышевской.

Теорема 4. Пусть точка $x^* \in \Omega$ обладает свойством T и ограничения в ней регулярны. Для того чтобы x^* была точкой локального минимума функции φ на Ω , необходимо, чтобы она обладала обобщенным альтернансом.

Доказательство. Заметим, что выполнено заключение теоремы 1, причем в силу свойства T будет $p+q=n$. Остается сослаться на теоремы 2 и 3.

Примечательно, что в условиях теоремы 4 точка x^* автоматически является точкой строгого локального минимума функции φ на Ω .

В заключение отметим, что альтернансные свойства решений линейных минимаксных задач с линейными ограничениями изучались в ⁽⁵⁾.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
22 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. И. Малоземов, А. Б. Певный, ДАН, т. 212, № 4 (1973). ² В. Г. Болтянский, И. С. Чеботару, ДАН, т. 213, № 2 (1973). ³ В. Ф. Демьянов, В. И. Малоземов, Введение в минимакс, «Наука», 1972. ⁴ А. Фиакко, Г. Мак-Кормик, Исчисление программирование, М., «Мир», 1972. ⁵ Е. Г. Гольштейн, Теория двойственности в математическом программировании ее приложения, «Наука», 1971.