

В. С. ЛОЦИН

# О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ

(Представлено академиком И. И. Артоболовским 9 I 1975)

1. Рассмотрим механическую систему материальных точек  $m_v$ ,  $v=1, 2, \dots, n$ , с идеальными голономными связями, имеющую  $k$  степеней свободы.

Если радиусы-векторы  $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(q_i, t)$  точек и их массы  $m_v = m_v(q_i, \dot{q}_i, t)$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ , считать достаточно гладкими функциями времени  $t$ , обобщенных координат  $q_i$  и обобщенных скоростей  $\dot{q}_i$ , то таким же свойством будет обладать и кинетическая энергия

$$T = \sum_{v=1}^n m_v \mathbf{v}_v^2 / 2$$

системы.

В работе В. С. Новоселова <sup>(1)</sup> с помощью объединенного принципа Даламбера — Лагранжа получены уравнения движения таких систем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + R_i + P_i, \quad (1)$$

где  $Q_i, R_i$  — обобщенные активные и реактивные силы, а

$$P_i = \sum_{v=1}^n \left[ \frac{dm_v}{dt} \mathbf{v}_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial m_v}{\partial \dot{q}_i} \frac{\mathbf{v}_v^2}{2} \right) - \frac{\partial m_v}{\partial q_i} \frac{\mathbf{v}_v^2}{2} \right] \quad (2)$$

дополнительная, обобщенная сила, соответствующая  $i$ -й координате, возникающая за счет изменения кинетической энергии частиц переменной массы.

2. Вычисления, выполненные с использованием принципа условного затвердевания, приводят к более компактному выражению для обобщенной силы

$$P_i = \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] - \left[ \frac{d^*}{dt} \left( \frac{\partial^* T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial^* T}{\partial q_i} \right]. \quad (3)$$

Оно оказалось удобным для динамического анализа и исследования тех механических систем, для которых известны интегральные представления динамической энергии, например, машинных агрегатов с переменными массами звеньев, <sup>(2)</sup> роторов переменной массы и др. В частности, для механической системы с одной степенью свободы, массы  $m_v$  точек которой и их радиусы-векторы  $\mathbf{r}_v$  являются функциями обобщенной координаты  $q$ ,

$$m_v = m_v(q), \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(q), \quad v=1, 2, \dots, n,$$

сила  $P$  равна разности скоростей изменения кинетической энергии реальной и «затвердевшей» систем в зависимости от  $q$ :

$$P = \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial^* T}{\partial q} = \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dq} \frac{\mathbf{v}_v^2}{2}.$$

В соответствии с (1) и (4) уравнение Лагранжа, описывающее движение такой механической системы, можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial T}{\partial q} = Q + R + \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial T}{\partial q}. \quad (5)$$

3. Рассмотрим машинный агрегат с переменными массами звеньев с одной степенью свободы, принимая за обобщенную координату угол поворота  $q = \varphi$ , а за обобщенную скорость — угловую скорость  $\dot{q} = \omega$  главного вала.

Если массы обрабатываемого продукта поступают в рабочую машину в функции угла поворота  $\varphi$  звена привода, то, не ограничивая общности, массу  $m_j$  любого звена и момент инерции  $J_{sj}$  относительно его центра масс можно считать функциями угла поворота  $\varphi$  главного вала:

$$m_j = m_j(\varphi), \quad J_{sj} = J_{sj}(\varphi), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Свойства этих функций в каждом конкретном случае определяются законами нагружения звеньев массами обрабатываемого продукта и распределением масс на исполнительных звеньях механизма. В последующих рассуждениях инерционные параметры (6) звеньев считаются непрерывно дифференцируемыми. Такая идеализация не может охватить всех случаев, которые могут встретиться на практике. Однако в широком классе случаев приток и убыль масс, как и их распределение на звеньях механизма, реализуются при сделанной гипотезе относительно функций (6).

Дифференцируя кинетическую энергию

$$T = J_{\pi}(\varphi) \omega^2 / 2$$

реальной и затвердевшей систем, уравнение (5) Лагранжа 2-го рода для рассматриваемого машинного агрегата представим в форме

$$J_{\pi}(\varphi) \frac{d\omega}{dt} + \frac{dJ_{\pi}(\varphi)}{d\varphi} \frac{\omega^2}{2} = M_a + M_r + k(\varphi) \frac{\omega^2}{2}, \quad (7)$$

где множитель

$$k(\varphi) = \sum_{j=1}^n \frac{dJ_{sj}}{d\varphi} \left( \frac{\omega_j}{\omega} \right)^2 + \frac{dm_j}{d\varphi} \left( \frac{v_{sj \text{ пер}}}{\omega} \right)^2 \quad (8)$$

физически может быть использован как приведенный коэффициент плотности инерционных параметров системы в положении  $\varphi$  главного вала.

Правая часть уравнения (7), помимо приведенных моментов  $M_a$ ,  $M_r$  активных и реактивных сил, содержит в явной форме выражение

$$M_m = \frac{\partial T}{\partial \varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = k(\varphi) \frac{\omega^2}{2} = \frac{k(\varphi)}{J_{\pi}(\varphi)} T \quad (9)$$

для приведенного момента, возникающего за счет изменения и перераспределения масс звеньев. С учетом (8) и (9) оно может быть преобразовано в известное уравнение И. И. Артоболевского — А. П. Бессонова<sup>(3)</sup>.

Если моменты  $M_a$ ,  $M_r$  зависят от положения  $\varphi$  и угловой скорости  $\omega$  звена привода,

$$M_a = M_a(\varphi, \omega), \quad M_r = M_r(\varphi, \omega),$$

то уравнение можно привести к виду

$$\frac{dT}{d\varphi} = M_a(\varphi, T) + M_r(\varphi, T) + \frac{k(\varphi)}{J_{\pi}(\varphi)} T = M(\varphi, T), \quad (10)$$

удобному для исследования предельных энергетических режимов<sup>(4)</sup> движения машинных агрегатов с переменными массами звеньев.

4. Для широких классов машин  $M_r(\varphi, T) = 0$ . Можно показать, что на этом топологическая структура и поведение предельных энергетических режимов движения машинного агрегата существенно зависят не только от характера активных сил, но и от законов нагружения звеньев обрабатываемого продукта и распределением масс на исполнительных звеньях механизма.

В общем случае инерционные параметры (6) звеньев машинного агрегата, как и их локальные плотности  $dm/d\varphi$ ,  $dJ_{sz}/d\varphi$  не будут периодическими. По этой причине и приведенный момент

$$M(\varphi, T) = M_x(\varphi, T) - M_c(\varphi, T) + k(\varphi)/J_n(\varphi) T$$

всех действующих сил, вообще говоря, не будет периодическим по углу поворота  $\varphi$ .

В условиях

$$M(\varphi, 0) > 0, \quad M(\varphi, T) \leq 0, \quad \int_{\varphi_0}^{+\infty} \left[ \lambda_1 - \frac{k(\varphi)}{J_n(\varphi)} \right] d\varphi = +\infty \quad \forall \varphi_0 \in E_1, \quad (11)$$

где

$$T^* = \sup T, \quad \lambda_1 = -\sup \{ \partial M_a / \partial T \} > 0,$$

существует единственный абсолютно продолжаемый предельный режим  $T = T_0(\varphi)$  движения машинного агрегата, который, вообще говоря, будет криволинейным. К нему по мере роста угла поворота  $\varphi$  главного вала безгранично приближается кинетическая энергия  $T = T(\varphi)$  любого из возможных движений машины. По этой причине предельный режим  $T = T_0(\varphi)$  имеет наибольшую теоретическую и прикладную значимость при динамических расчетах, проектировании и конструировании машинных агрегатов с переменными массами звеньев.

Массы обрабатываемого продукта могут поступать к исполнительным звеньям и распределяться на них периодически с тем же периодом  $\xi$ , что и период движущих сил и сил сопротивлений; в этом случае предельный режим  $T = T_0(\varphi)$  будет  $\xi$ -периодическим<sup>(3)</sup>.

Инерционные параметры (6) звеньев машинного агрегата могут оказаться почти периодическими. При равномерной непрерывности их локальных плотностей  $dm/d\varphi$ ,  $dJ_{sz}/d\varphi$  предельный режим  $T = T_0(\varphi)$  окажется также почти периодическим.

5. Можно показать, что в условиях (11)

$$q \exp \int_{\varphi}^{\infty} \left( -\lambda_2 + \frac{k(\varphi)}{J_n(\varphi)} \right) d\varphi \leq |T(\varphi) - T(\varphi_0)| \leq q \exp \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[ -\lambda_1 + \frac{k(\varphi)}{J_n(\varphi)} \right] d\varphi$$

при любом  $\varphi \geq \varphi_0$ , где

$$q = |T(\varphi_0) - T_0(\varphi_0)|, \quad 0 \leq T(\varphi_0) \leq T^*.$$

Отсюда следует, что в промежутках изменения угла поворота  $\varphi$  главного вала, в которых приведенный коэффициент плотности инерционных параметров системы  $k(\varphi) > 0$  ( $< 0$ ), происходит замедление (ускорение) переходных процессов при выходе машинного агрегата на предельный режим  $T = T_0(\varphi)$ .

Рязанское высшее военное командное училище связи  
им. М. В. Захарова

Поступило  
26 XII 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> В. С. Новоселов, Вестн. ЛГУ, 1, № 19 (1956). <sup>2</sup> А. П. Бессонов, Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев, М., «Наука», 1967. <sup>3</sup> И. И. Артоблевский, А. П. Бессонов, Динамика машин, М., Машиз, 1962. <sup>4</sup> В. С. Лощинин, Тр. Ин-та машиноведения. Семинар по теории машин и механизмов, Изд. АН СССР, т. 22, в. 88 (1961). <sup>5</sup> В. С. Лощинин, Там же, т. 23, в. 91 (1962).