

УДК 511.3

МАТЕМАТИКА

Д. А. МИТЬКИН

ОБ ОЦЕНКАХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 III 1975)

Пусть $n \geq 5$ целое, $p > n$ простое, $f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$ — бесквадратный по mod p многочлен с целыми коэффициентами

$$S = \sum_{x=1}^p \left(\frac{f(x)}{p} \right),$$

S — сумма символов Лежандра.

Хорошо известны оценки А. Вейля ⁽¹⁾:

$$|S| < (n-1) \sqrt{p},$$

если n нечетное, и

$$\left| S + \left(\frac{a_n}{p} \right) \right| < (n-2) \sqrt{p},$$

если n четное. В работах ⁽²⁻⁴⁾ получены результаты, усиливающие оценку А. Вейля для сумм символов Лежандра.

Пусть $g(x) \equiv 0 \pmod{p}$ — многочлен степени n с целыми коэффициентами. Для рациональных тригонометрических сумм с простым знаменателем А. Вейлем ⁽¹⁾ доказана оценка

$$\left| \sum_{x=1}^p \exp \left(2\pi i \frac{g(x)}{p} \right) \right| < (n-1) \sqrt{p}.$$

В настоящей работе получено усиление этой оценки для частного случая, когда n делит $p-1$ и $g(x) = \lambda x^n$, где $(\lambda, p) = 1$.

Лемма. Пусть λ и $n \geq 3$ целые, $p > n$ простое, n делит $p-1$, $(\lambda, p) = 1$. Пусть имеет место оценка снизу

$$\left| \sum_{x=1}^p \exp \left(2\pi i \frac{\lambda x^n}{p} \right) \right| > (n-1) \sqrt{p} - q, \quad q > 0. \quad (1)$$

Тогда справедливы оценки:

$$\left| \sum_{x=1}^p \left(\frac{4x^n+1}{p} \right) \right| > (n-1) \sqrt{p} - 9q,$$

если n нечетное, и

$$\left| \sum_{x=1}^p \left(\frac{4x^n+1}{p} \right) + 1 \right| > (n-2) \sqrt{p} - 12q,$$

если n четное.

Доказательство. Полагаем $q < \frac{n-1}{9} \sqrt{p}$, так как в противном случае лемма, очевидно, верна. Покажем, что сумма в (1) действительна.

При нечетном n этот факт тривиален. Пусть n четное, $n=2k$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^p \exp\left(2\pi i \frac{\lambda x^n}{p}\right) &= \sum_{x=1}^p \left(1 + \left(\frac{x}{p}\right)\right) \exp\left(2\pi i \frac{\lambda x^n}{p}\right) = \\ &= \sum_{x=1}^p \exp\left(2\pi i \frac{\lambda x^k}{p}\right) + \sum_{x=1}^p \left(\frac{x}{p}\right) \exp\left(2\pi i \frac{\lambda x^k}{p}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку $2k$ делит $p-1$, то легко показать, что первая сумма в (2) действительна, а вторая действительна, если $4k$ делит $p-1$ и чисто мнимая, если $4k$ не делит $p-1$. Если $4k$ не делит $p-1$, из оценок

$$\left| \sum_{x=1}^p \exp\left(2\pi i \frac{\lambda x^k}{p}\right) \right| < (k-1) \sqrt{p}; \quad \left| \sum_{x=1}^p \left(\frac{x}{p}\right) \exp\left(2\pi i \frac{\lambda x^2}{p}\right) \right| \leq k \sqrt{p}$$

следует, что

$$\left| \sum_{x=1}^p \exp\left(2\pi i \frac{\lambda x^n}{p}\right) \right| < \sqrt{k^2 + (k-1)^2} \cdot p^{1/2} < \frac{8(n-1)}{9} \sqrt{p}.$$

Но это противоречит (1) при выбранном $q < \frac{n-1}{9} \sqrt{p}$. Таким образом, доказано, что сумма в (1) действительна. Кроме того, имеем равенство

$$(-1)^{(p-1)/n} = 1. \quad (3)$$

Полагаем, что сумма в (1) положительна. В случае, когда она отрицательна, доказательство проводится аналогично. Неравенство (1) перепишем в виде

$$\sum_{x=1}^p \exp\left(2\pi i \frac{\lambda x^n}{p}\right) > (n-1) \sqrt{p} - q. \quad (4)$$

Пусть теперь χ — примитивный характер n -х степенных вычетов mod p . Справедливо равенство

$$\sum_{x=1}^p \exp\left(2\pi i \frac{\lambda x^n}{p}\right) = \sum_{x=1}^p (\chi(x) + \dots + \chi^{n-1}(x)) \exp\left(2\pi i \frac{\lambda x}{p}\right).$$

Введем обозначения для гауссовых сумм:

$$S_j = \sum_{x=1}^p \chi^j(x) \exp\left(2\pi i \frac{\lambda x}{p}\right); \quad j=1, \dots, n-1.$$

Из (4) получим

$$S_1 + \dots + S_{n-1} > (n-1) \sqrt{p} - q. \quad (5)$$

Учитывая (3), с помощью простейших преобразований легко показать, что при $j \neq n/2$

$$S_j^2 = S_{2j} \sum_{x=1}^p \chi^j(x^2 - \mu), \quad (6)$$

где μ определяется из сравнения

$$4\mu \equiv 1 \pmod{p},$$

и $S_{2j} = S_{j_0}$, $j_0 \equiv 2j \pmod{n}$, $1 \leq j_0 \leq n-1$.

Обозначим действительную часть S_j через ϕ_j . Поскольку модуль гауссовой суммы S_j равен $\sqrt{p}$, то можно написать

$$S_j = \varphi_j \pm i\sqrt{p - \varphi_j^2}, \quad j=1, \dots, n-1, \quad (7)$$

где перед i стоит один из знаков $+$ или $-$ (выбор знака зависит от выбора χ).

Из (6) получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{x=1}^p \chi^j(x^2 - \mu) &= \frac{1}{p} \{ (2\varphi_j^2 - p) \varphi_{2j} \pm 2\varphi_j \sqrt{(p - \varphi_j^2)(p - \varphi_{2j}^2)} \} \geq \\ &\geq \frac{1}{p} \{ (2\varphi_j^2 - p) \varphi_{2j} - |\varphi_j| (2p - \varphi_j^2 - \varphi_{2j}^2) \} \geq \\ &\geq \frac{1}{p} \{ (2\varphi_j^2 - p) \varphi_{2j} - \sqrt{p} (2p - \varphi_j^2 - \varphi_{2j}^2) \}. \end{aligned} \quad (8)$$

Положим $\eta = \sqrt{p} - \gamma_j$. Тогда $0 \leq \gamma_j \leq 2\sqrt{p}$ и, в силу (5) и (7),

$$0 \leq \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1} < q.$$

Продолжим оценку (8), используя новые обозначения

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{x=1}^p \chi^j(x^2 - \mu) &\geq \frac{1}{p} \{ (p - 4\sqrt{p} \gamma_j + 2\gamma_j^2) (\sqrt{p} - \gamma_{2j}) - \\ &- (\sqrt{p} - 2\sqrt{p} \gamma_j + 2\sqrt{p} \gamma_{2j} - \gamma_j^2 - \gamma_{2j}^2) \} \geq \sqrt{p} - 6\gamma_j - 3\gamma_{2j}. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\operatorname{Re} \sum_{x=1}^p \chi^j(x^2 - \mu) \geq \sqrt{p} - 6\gamma_j - 3\gamma_{2j}. \quad (9)$$

Записывая число решений T сравнения

$$y^2 \equiv x^n + \mu \pmod{p}$$

двумя способами:

$$\begin{aligned} T &= p + \sum_{x=1}^p \left(\frac{x^n + \mu}{p} \right) = p + \sum_{x=1}^p \left(\frac{4x^n + 1}{p} \right), \\ T &= p + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{x=1}^p \chi^j(x^2 - \mu), \end{aligned}$$

получаем равенство

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{x=1}^p \chi^j(x^2 - \mu) = \sum_{x=1}^p \left(\frac{4x^n + 1}{p} \right). \quad (10)$$

Просуммируем обе части (9) по j . При n нечетном, используя (10), получим

$$\sum_{x=1}^p \left(\frac{4x^n + 1}{p} \right) \geq (n-1) \sqrt{p} - 9(\gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1}) > (n-1) \sqrt{p} - 9q.$$

Для нечетного n лемма доказана. При четном n имеем

$$\sum_{x=1}^p \left(\frac{4x^n + 1}{p} \right) - \sum_{x=1}^p \chi^{n/2}(x^2 - \mu) = \sum_{x=1}^p \left(\frac{4x^n + 1}{p} \right) + 1 \geq$$

$$\geq (n-2)\sqrt{p} - 6 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n/2}}^{n=1} \gamma_j - 6 \sum_{j=1}^{n/2-1} \gamma_{2j} > (n-2)\sqrt{p} - 12q.$$

Лемма доказана.

Теорема. Пусть $n \geq 8$, λ — целое, $p > (n^2+9)/2$ (λ, p) = 1 и n делит $p-1$. Тогда справедлива оценка

$$\left| \sum_{x=1}^p \exp\left(2\pi i \frac{\lambda x^n}{p}\right) \right| \leq \frac{13}{14}(n-1)\sqrt{p} + \\ + \frac{1}{14}(n-1) \sqrt{p - \frac{(n-3)(n-4)}{4}} + \frac{1}{6}\delta_2(n),$$

где $\delta_2(n)$ равно 1 или 0, смотря по тому, четное n или нечетное.

Доказательство. Допустим противное: что оценка не выполняется. Тогда, выбрав

$$q = \frac{1}{14}(n-1)(\sqrt{p} - \sqrt{p - \frac{(n-3)(n-4)}{4}}) - \frac{1}{6}\delta_2(n),$$

будем иметь оценку

$$\left| \sum_{x=1}^p \exp\left(2\pi i \frac{\lambda x^n}{p}\right) \right| > (n-1)\sqrt{p} - q.$$

Если $q \leq 0$, то полученная оценка снизу противоречит известной оценке сверху

$$\left| \sum_{x=1}^p \exp\left(2\pi i \frac{\lambda x^n}{p}\right) \right| < (n-1)\sqrt{p};$$

поэтому считаем $q > 0$. Согласно лемме, при нечетном n получим, что

$$\left| \sum_{x=1}^p \left(\frac{4x^n+1}{p} \right) \right| > (n-1)\sqrt{p} - 9q > (n-1) \sqrt{p - \frac{(n-3)(n-4)}{4}},$$

а при четном n

$$\left| \sum_{x=1}^p \left(\frac{4x^n+1}{p} \right) + 1 \right| > (n-2)\sqrt{p} - 12q > (n-2) \sqrt{p + 1 - \frac{n(n-4)}{4}} + 2.$$

Но эти оценки противоречат результатам, установленным в работах ^(2, 3). Теорема доказана.

Следствие. Пусть $c > 0$ — фиксированное число, p — простое, большее некоторой постоянной, зависящей от c : $p > c\sqrt{p}$ — целое, n делит $p-1$, λ — целое, $(\lambda, p) = 1$.

Тогда справедлива оценка

$$\left| \sum_{x=1}^p \exp\left(2\pi i \frac{\lambda x^n}{p}\right) \right| < \theta(n-1)\sqrt{p},$$

где $\theta < 1$ и не зависит от n и p .

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
1 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Weil, Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, Paris, 1948.
- Н. М. Коробов, ДАН, т. 196, № 4, 764 (1971). ³ Д. А. Митькин, Матем. заметки, т. 14, в. 1, 73 (1973). ⁴ H. M. Stark, Proc. Symp. in Pure Math., Am. Math. Soc., v. 24, 285 (1973). ⁵ A. Weil, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., v. 34, № 5, 204 (1948).