

С. И. ПИНЧУК

ТЕОРЕМА БОГОЛЮБОВА ОБ «ОСТРИЕ КЛИНА» ДЛЯ ПОРОЖДАЮЩИХ МНОГООБРАЗИЙ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 26 X 1973)

В этой работе мы обобщим классическую теорему Боголюбова об «острие клина» ⁽¹⁾ на случай порождающих многообразий, применяя метод, использованный в работе Мартино ⁽²⁾.

Пусть $\mathcal{F}$ — пучок над $\mathbb{C}^n$. Если Ω — открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и A — замкнуто в Ω , то, как обычно, $\mathcal{F}(\Omega)$ обозначает пространство сечений пучка $\mathcal{F}$ над Ω , $\mathcal{F}_A(\Omega)$ — множество элементов из $\mathcal{F}(\Omega)$ с носителями в A , $H_A^q(\Omega, \mathcal{F})$ — q -мерную группу когомологий пространства Ω с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$ и с носителями в A ⁽³⁾.

Обозначения $O, D', D'^{0, q}$ мы примем соответственно для пучков ростков голоморфных функций, обобщенных функций, дифференциальных форм типа (p, q) с коэффициентами в D' . Группу $H_A^q(\Omega, O)$ мы будем отождествлять с фактор-группой $\text{Ker}(D'^{0, q}(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} D'^{0, q+1}(\Omega)) / \text{Im}(D'^{0, q-1}(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} D'^{0, q}(\Omega))$.

Пусть $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ — покрытие множества Ω , $U_{i_1, \dots, i_p} = \bigcap_{k=1}^p U_{i_k}$. Через $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ обозначаются соответственно группы коцепей и когомологий с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$ для покрытия $\mathcal{U}$, $\delta: C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ — кограничный оператор.

Если M — многообразие класса C^∞ , $D(M)$ обозначает пространство бесконечно дифференцируемых на M функций с компактными носителями.

Определение. Многообразие $M \subset \mathbb{C}^n$ называется порождающим (generic), если для любой точки $a \in M$ вещественное касательное пространство $T_a(M) \subset \mathbb{C}^n$ не содержится ни в какой $(n-1)$ -мерной комплексной плоскости.

Пусть $\rho_1, \dots, \rho_{2n}$ — гладкие вещественные функции в области голоморфности $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ и отображение

$$P = (\rho_1, \dots, \rho_{2n}): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \quad (1)$$

является диффеоморфизмом Ω на $P(\Omega)$.

Для $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ положим $M_t = \{z \in \Omega: \rho_1(z) = t_1, \dots, \rho_n(z) = t_n\}$. Пусть, далее, $M = M_0$, $U_i = \{z \in \Omega: \rho_i(z) > 0\}$, $U_{-i} = \{z \in \Omega: \rho_i(z) < 0\}$ при $i = 1, \dots, n$.

Для произвольной функции θ на многообразии M положим $\theta^* = \theta \circ P^{-1} \circ \pi \circ P$, где $\pi: (t_1, \dots, t_{2n}) \rightarrow (0, \dots, 0, t_{n+1}, \dots, t_{2n})$ — проекция пространства $\mathbb{R}^{2n}$ на $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$.

Теорема 1. Пусть отображение (1) является диффеоморфизмом класса C^∞ и M — порождающее многообразие. Пусть, далее, функции $f^+ \in O(U_{1, \dots, n})$, $f^- \in O(U_{-1, \dots, -n})$ таковы, что для любой $\theta \in D(M)$ существуют и равны пределы

$$\lim_{t \rightarrow 0, t \in \mathbb{R}^n} \int_{M_t} f^+ \theta^* dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n = \lim_{t \rightarrow 0, t \in \mathbb{R}^n} \int_{-M_t} f^- \theta^* dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n,$$

где

$$R_+^n = \{t \in R^n: t_1 > 0, \dots, t_n > 0\}, \quad R_-^n = \{t \in R^n: t_1 < 0, \dots, t_n < 0\}.$$

Тогда существует функция f , голоморфная в окрестности многообразия M и совпадающая с f^+ в $U_1, \dots, n$ и с f^- в $\bar{U}_{-1, \dots, -n}$.

Замечание. Если $\rho_i(z) = y_i$, $\rho_{i+n}(z) = x_i$, $i = 1, \dots, n$, то теорема 1 превращается в классическую теорему об «острие клина».

Теорема 2. Пусть отображение (1) есть диффеоморфизм класса C^2 , M — порождающее многообразие, а функции $f^+ \in O(U_{1, \dots, n})$ и $f^- \in O(\bar{U}_{-1, \dots, -n})$ непрерывно продолжаются на M и $f^+|_M = f^-|_M$.

Тогда существует функция f , голоморфная в окрестности многообразия M и совпадающая с f^+ в $U_{1, \dots, n}$ и с f^- в $\bar{U}_{-1, \dots, -n}$.

Следствие. Пусть Σ — область в C^n , $N \subset \Sigma$ — порождающее многообразие. Предположим, что $\partial \Sigma$ и N — многообразия класса C^2 . Если функция $f \in O(\Sigma) \cap C(\bar{\Sigma})$ такова, что $f|_N = 0$, то $f = 0$ в Σ .

Схема доказательства теорем 1 и 2. После линейной замены координат в C^n мы можем считать, что $0 \in M$ и в окрестности начала координат $\rho_i(z) = y_i + \bar{o}(|z|)$ при $i = 1, \dots, n$. Если $\alpha > 0$ достаточно велико, то функции

$$\bar{\rho}_i = -\rho_i + \alpha \sum_{k=1}^n \rho_k^2, \quad \bar{\rho}_{-i} = \rho_i + \alpha \sum_{k=1}^n \rho_k^2, \quad i = 1, \dots, n,$$

плюрисубгармоничны в окрестности нуля. Уменьшая, если надо, область Ω , можно считать, что множества

$$V_i = \{z \in \Omega: \bar{\rho}_i(z) < 0\}, \quad V_{-i} = \{z \in \Omega: \bar{\rho}_{-i}(z) < 0\}$$

являются областями голоморфности. Очевидно, что $V_{\pm i} \subset U_{\pm i}$ и $\mathcal{V} = \{V_{\pm i}\}_{i=1, \dots, n}$ есть покрытие множества $\Omega \setminus M$. Поскольку $V_i, \dots, V_{n+1} = \emptyset$, если все i_k различны, то $C^n(\mathcal{V}, O) = 0$ и определено фактор-отображение

$$\mu: C^{n-1}(\mathcal{V}, O) \rightarrow H^{n-1}(\mathcal{V}, O).$$

Так как все множества V_i являются областями голоморфности, то существует изоморфизм Дольбо — Лере

$$\lambda: H^{n-1}(\mathcal{V}, O) \rightarrow H^{n-1}(\Omega \setminus M, O).$$

Напомним его конструкцию. Пусть $\bar{F} \in H^{n-1}(\mathcal{V}, O)$ и $F^0 \in C^{n-1}(\mathcal{V}, O)$ — представитель $\bar{F}$. Определены (хотя и неоднозначно) элементы $F^k \in C^{n-k-1}(\mathcal{V}, D'^0, k)$, $G^k \in C^{n-k-1}(\mathcal{V}, D'^0, k-1)$ такие, что $\bar{\partial} G^k = F^k$, $\delta G^k = F^{k-1}$, $\delta F^k = 0$, $k = 1, \dots, n-1$.

Коцикл $F^{n-1} \in C^0(\mathcal{V}, D'^0, n-1)$ определяет замкнутую форму $G \in D'^0, n-1(\Omega \setminus M)$. Образ G в $H^{n-1}(\Omega \setminus M, O)$ и есть $\lambda(\bar{F})$.

Такое построение однозначно определяет отображение λ и называется процессом Вейля.

Поскольку Ω — область голоморфности, то существует изоморфизм

$$\nu: H^{n-1}(\Omega \setminus M, O) \rightarrow H_M^n(\Omega, O).$$

Пусть $\bar{G} \in H^{n-1}(\Omega \setminus M, O)$ и $G \in D'^0, n-1(\Omega \setminus M)$ — представитель $\bar{G}$. Если G продолжается для формы $G' \in D'^0, n-1(\Omega)$, то $\bar{\partial} G' \in D_M'^0, n(\Omega)$ принадлежит

классу когомологий $\nu(\bar{G})$ в группе $H_M^n(\Omega, O) = D_M'^0, n(\Omega) / \bar{\partial} D_M'^0, n-1(\Omega)$.

Подробнее об отображениях λ и ν см. (3).

Положим $b = (2/i)^{n-1} \nu \circ \lambda \circ \mu: C^{n-1}(\mathcal{V}, O) \rightarrow H_M^n(\Omega, O)$. Из определения отображения b следует, что $\ker b = \delta C^{n-2}(\mathcal{V}, O)$. Пусть $J = (j_1, \dots, j_n)$, $j_k = \sigma_k k$, $\sigma_k = \pm 1$.

Обозначим через $O(U_J, b)$ множество таких функций $f \in O(U_J)$, что для любой $\theta \in D(M)$ существует предел

$$l(\theta) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{M_t} f \theta^* dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n,$$

где $t = (t_1, \dots, t_n)$ и $\sigma_k t_k > 0$ при $k=1, \dots, n$.

Лемма 1. Пусть $F = \{f_I\} \in C^{n-1}(\mathcal{V}^0, O)$ — такой коцикл, что $f_I = 0$ при $I \neq J$ и выполняется одно из следующих двух условий:

а) $\rho_1, \dots, \rho_{2n} \in C^\infty(\Omega)$, $f_J \in O(U_J, b)$,

б) $\rho_1, \dots, \rho_{2n} \in C^2(\Omega)$, $f_J \in O(U_J) \cap C(\bar{V}_J)$.

Тогда существует обобщенная функция $\tilde{b}(f_J) \in D_M'(\Omega)$ такая, что $\langle \tilde{b}(f_J), \varphi \rangle = l(\varphi|_M)$ для любой $\varphi \in D(\Omega)$, и форма $\sigma_1 \dots \sigma_n \tilde{b}(f_J) d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n$ принадлежит классу когомологий $b(F)$.

Доказательство. Пусть элементы $F^k = \{f_I^k\} \in C^{n-k-1}(\mathcal{V}^0, D^{(0,k)})$, $G^k = \{g_I^k\} \in C^{n-k-1}(\mathcal{V}^0, D^{(0,k-1)})$ определены следующим образом:

$$f_{i_{k+1}, \dots, i_n}^k = 0, \text{ если } (i_{k+1}, \dots, i_n) \neq (j_{k+1}, \dots, j_n),$$

$$f_{j_{k+1}, \dots, j_n}^k = \sum_{|m_1| < |m_2| < \dots < |m_k|} p_{m_1, \dots, m_k}^k d\bar{z}_{m_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{m_k},$$

$$g_{i_{k+1}, \dots, i_n}^k = 0, \text{ если } (i_{k+1}, \dots, i_n) \neq (j_{k+1}, \dots, j_n),$$

$$g_{j_{k+1}, \dots, j_n}^k = \sum_{|m_1| < |m_2| < \dots < |m_{k-1}|} q_{m_1, \dots, m_{k-1}}^k d\bar{z}_{m_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{m_{k-1}}$$

и для любой $\varphi \in D(V_{j_{k+1}, \dots, j_n})$

$$\begin{aligned} \langle p_{m_1, \dots, m_k}^k, \varphi \rangle &= \\ &= \sigma_1 \dots \sigma_k \int_{S_k} f_J \varphi dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_{m_1} \wedge \widehat{d\bar{z}_{m_1}} \wedge \dots \wedge dz_{m_k} \wedge \widehat{d\bar{z}_{m_k}} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \\ \langle q_{m_1, \dots, m_{k-1}}^k, \varphi \rangle &= \sigma_1 \dots \sigma_{k-1} \int_{S_{k-1}} f_J \varphi dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_{m_1} \wedge \widehat{d\bar{z}_{m_1}} \wedge \dots \\ &\dots \wedge dz_{m_{k-1}} \wedge \widehat{d\bar{z}_{m_{k-1}}} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n, \end{aligned}$$

где $S_k = \{z \in \Omega: \bar{\rho}_{j_1}(z) = 0, \dots, \bar{\rho}_{j_k}(z) = 0, \bar{\rho}_{j_{k+1}}(z) < 0, \dots, \bar{\rho}_{j_n}(z) < 0\}$.

Очевидно, что $\delta G^k = F^k$, $\delta F^k = 0$. С помощью формулы Стокса легко проверить, что $\partial G^k = F^k$. Следовательно F^k , G^k являются элементами процесса Вейля, начинающегося с $(2/i)^n F$. Утверждение леммы отсюда легко получается с помощью формулы Стокса и с учетом конструкции отображения γ . Следствием леммы 1 является

Лемма 2. Пусть выполнены условия одной из теорем 1 и 2 и $F = \{f_J\} \in C^{n-1}(\mathcal{V}^0, O)$ — следующий коцикл:

$$\begin{aligned} f_1, \dots, n = f^+|_{v_1, \dots, n}, \quad f_{-1}, \dots, -n = (-1)^{n+1} f^-|_{v_{-1}, \dots, -n}, \\ f_I = 0, \text{ если } I \neq \pm(1, \dots, n) \end{aligned}$$

тогда $F \in \delta C^{n-2}(\mathcal{V}^0, O)$.

При $n=2$ из леммы 2 получаем, что существуют такие функции $h_i \in O(V_i)$, $i = \pm 1, \pm 2$, что

$$f_{12} = h_2 - h_1, \quad -f_{-1, -2} = h_{-2} - h_{-1}, \quad h_2 = h_{-1}, \quad h_{-2} = h_1.$$

По теореме Кнезера о вложенном ребре ⁽⁴⁾ функции h_i , а следовательно, также f^+ и f^- , голоморфно продолжаются в окрестность множества M и $f^+ = h_2 - h_1 = -(h_{-2} - h_{-1}) = f^-$.

В этом месте мы существенно воспользовались условием, что многообразие M порождающее.

Если это условие не выполнено, например, M есть одномерное комплексное многообразие, то теоремы 1 и 2 уже не имеют места, поскольку существует такая функция $f \in O(\Omega)$, что $f|_M = 0$, но $f \neq 0$ в Ω .

В общем случае теоремы 1 и 2 выводятся из леммы 2 индукцией по n с помощью метода работы (2).

В заключение автор пользуется случаем выразить благодарность Б. В. Шабату за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов, *Вопр. теории дисперсионных соотношений*, 1958. ² A. Martineau, *Proc. of the Intern. Summer Institute Lisbon*, 1964. ³ П. Шапира, *Теория гиперфункций*, М., 1972. ⁴ Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, М., 1969.