

Л. Б. СОФМАН
ЗАДАЧА ШЕННОНА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 IX 1973)

1°. Данная работа посвящена задаче, поставленной в свое время Клодом Шенноном ((¹), стр. 332). В уточненном виде эта задача формулируется следующим образом. Пусть $\xi(t)$ — комплексный или вещественный случайный процесс, $-\infty < t < \infty$. Как известно, процесс $\xi(t)$ задает на некотором функциональном пространстве $\mathcal{F}$ (всех комплексных или же всех вещественных функций на действительной оси) вероятностную меру P_ξ , определенную на минимальной σ -алгебре $\mathcal{A}$, содержащей все цилиндрические множества из $\mathcal{F}$ (²). Пусть $T > 0$, $\varepsilon > 0$, $\mathcal{B} \in \mathcal{A}$, $P_\xi(\mathcal{B}) < \delta$, $0 < \delta < 1$. Система функций $x_i(t) \in \mathcal{F}$, $i \in I$, называется ε, δ -сетью по метрике $B(-T, T)$ для процесса $\xi(t)$, если для любой функции $x(t) \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}$ существует такое $j \in I$, что $\sup_{|t| \leq T} |x(t) - x_j(t)| \leq \varepsilon$. Минимальную мощность множества функций $\{x_i(t)\}$ обладающих этим свойством, обозначим через $N_\xi(\varepsilon, \mathcal{B}, T)$. Аналогично, максимальную мощность множества функций из $\mathcal{F} \setminus \mathcal{B}$, образующих по метрике $B(-T, T)$ 2ε -различимое множество в $\mathcal{F} \setminus \mathcal{B}$, обозначим через $M_\xi(\varepsilon, \mathcal{B}, T)$ (³). Положим,

$$N_\xi(\varepsilon, \delta, T) = \inf N_\xi(\varepsilon, \mathcal{B}, T), \quad M_\xi(\varepsilon, \delta, T) = \inf M_\xi(\varepsilon, \mathcal{B}, T),$$

где $\inf$ берется по всем таким множествам $\mathcal{B} \in \mathcal{A}$, что $P_\xi(\mathcal{B}) < \delta$. Двоичные логарифмы величин $N_\xi(\varepsilon, \delta, T)$ и $M_\xi(\varepsilon, \delta, T)$ обобщают на случай некомпактных метрических пространств с мерой, введенные А. Н. Колмогоровым (³) понятия ε -энтропии и ε -емкости компактного метрического пространства. Верхним и нижним числом Шеннона для процесса $\xi(t)$ назовем соответственно величины

$$\bar{S}_\xi(\delta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log N_\xi(\varepsilon, \delta, T)}{2T \log(1/\varepsilon)},$$

$$\underline{S}_\xi(\delta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log M_\xi(\varepsilon, \delta, T)}{2T \log(1/\varepsilon)}.$$

Далее мы будем рассматривать сепарабельные гауссовские стационарные процессы с ограниченным спектром и нулевым средним. Будем предполагать также, что спектральные меры рассматриваемых процессов абсолютно непрерывны относительно лебеговой меры: $F(d\lambda) = f(\lambda) d\lambda$. Рассмотрим класс $\mathcal{K}$ неотрицательных ограниченных сверху суммируемых финитных функций на вещественной оси. Очевидно, что $\mathcal{K}$ есть выпуклый конус. Любая функция $f(\lambda) \in \mathcal{K}$ однозначно определяет некоторый комплексный гауссовский стационарный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним и ограниченным спектром. Положим

$$\bar{S}(f, \delta) = \bar{S}_\xi(\delta), \quad \underline{S}(f, \delta) = \underline{S}_\xi(\delta).$$

При фиксированном δ величины $\bar{S}(f, \delta)$ и $\underline{S}(f, \delta)$ называются соответственно верхним и нижним δ -функционалом Шеннона. В том случае, когда $\bar{S}(f, \delta) = \underline{S}(f, \delta)$, их общее значение $S(f, \delta)$ называется δ -числом Шеннона процесса $\xi(t)$, имеющего спектральную плотность $f(\lambda)$.

Для всякой функции $f(\lambda) \in \mathcal{H}$ внутренним носителем $\underline{G}(f)$ называется объединение всех таких открытых множеств U на вещественной оси, что $\int_U \log f(\lambda) d\lambda > -\infty$. Внешним носителем функции $f(\lambda)$ называется минимальное замкнутое множество $\bar{G}(f)$ такое, что $\int_{\bar{G}(f)} f(\lambda) d\lambda = 0$ для всякого измеримого множества A , не пересекающегося с $\bar{G}(f)$. Очевидно, что $\underline{G}(f) \subset \bar{G}(f)$. Функцию $f(\lambda)$ назовем регулярной, если $\text{mes } \bar{G}(f) = \text{mes } \underline{G}(f)$, где mes — линейная мера Лебега.

Основой в данной статье является следующая

Теорема. Для любого $\delta, 0 < \delta < 1$, и $f \in \mathcal{H}$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{\pi} \text{mes } \underline{G}(f) \leq \underline{S}(f, \delta) \leq \bar{S}(f, \delta) \leq \frac{1}{\pi} \text{mes } \bar{G}(f).$$

В частности, если функция $f(\lambda)$ регулярна, то для нее определено число Шеннона, причем

$$S(f, \delta) = \frac{1}{\pi} \text{mes } G(f),$$

где $G(f)$ — носитель функции $f(\lambda)$.

Аналогичное соотношение имеет место для вещественных случайных процессов (с заменой $\frac{1}{\pi}$ на $\frac{1}{2\pi}$).

2°. В этом пункте мы наметим план доказательства теоремы.

Предложение 1. Пусть $0 < \delta < 1$, $f \in \mathcal{H}$, $G(f) \in [-1, 1]$; тогда

$$\bar{S}(f, \delta) \leq 2/\pi.$$

Доказательство. Пусть гауссовский стационарный процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda)$. Поскольку функция $N_{\xi}(\epsilon, \delta, T)$ при фиксированных ϵ и δ монотонна по T , то при определении верхнего и нижнего чисел Шеннона для процесса $\xi(t)$ можно устремлять $T \rightarrow \infty$ лишь по значениям арифметической прогрессии $T_n = \pi n$, $n = 1, 2, \dots$. Известно представление рассматриваемого процесса в виде ряда, сходящегося в среднеквадратичном ⁽²⁾ (стр. 296):

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t - \pi k)}{t - \pi k} \cdot \xi(\pi k).$$

Пусть $0 < \alpha < 1$, $n(\alpha) = n + [n^\alpha]$, рассмотрим гауссовский процесс

$$\xi_n(t) = \sum_{|k| > n(\alpha)} \frac{\sin(t - \pi k)}{t - \pi k} \cdot \xi(\pi k).$$

Можно показать, что для любого $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{|t| \leq T_n} |\xi_n(t)| > \epsilon \right\} = 0. \quad (1)$$

Для этого надо воспользоваться одним предложением из теории случайных процессов ⁽²⁾, стр. 235–236, применив его к процессу $\tilde{\xi}_n(t) = \xi_n(t - T_n)$ на отрезке $[0, 2T_n]$ и положив в нем

$$g(h) = h^r, \quad q(C, h) = \frac{2}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\sigma_n(t, h)}{Cg(h)} \exp \left\{ -\frac{C^2 g^2(h)}{2\sigma_n^2(t, h)} \right\}$$

где $\sigma_n^2(t, h) = D[\tilde{\xi}_n(t+h) - \tilde{\xi}_n(t)]$ и где число r удовлетворяет неравенствам $0 < r < 1$, $2 < 2r + \alpha$.

Непосредственно доказывается также, что если $\theta > 1$, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \sum_{|k| \leq N} |\xi(\pi k)|^2 > \theta(4N+2) \right\} = 0. \quad (2)$$

В силу соотношений (1) и (2) для любого $\delta > 0$ существует такое n_0 , что для любого $n > n_0$

$$P \left\{ \sup_{|t| \leq Tn} |\xi_n(t)| > 1/2\epsilon \right\} + P \left\{ \sum_{|k| \leq n(\alpha)} |\xi(\pi k)|^2 > \theta(4n(\alpha)+2) \right\} < \delta.$$

Соответствующее множество выборочных траекторий имеет вероятностную меру $< \delta$.

Оценку сверху для числа элементов $1/2\epsilon$ -сети оставшегося множества можно получить, если использовать метод, примененный В. М. Тихомировым⁽⁴⁾. В результате мы получим необходимую оценку.

Предложение 2. Пусть $0 < \delta < 1$, $f(\lambda) \in \mathcal{H}$, $G(f) \subset [-1, 1]$, причем

$$\int_{-1}^1 \log f(\lambda) d\lambda > -\infty.$$

Тогда $\underline{S}(f, \delta) \geq 2/\pi$.

Доказательство. Пусть $\xi(t)$ — гауссовский стационарный процесс со спектральной плотностью $f(\lambda)$. Для оценки снизу величины $\underline{S}(f, \delta)$ достаточно рассмотреть значения процесса $\xi(t)$ при $t = \pi k$ ($k = 0, \pm 1, \dots$).

Предложение 3. Пусть $0 < \delta < 1$. Тогда

а) $\bar{S}(f(\lambda/\alpha), \delta) = \alpha \bar{S}(f(\lambda), \delta)$, где $\alpha > 0$;

б) $\bar{S}(f, \delta(n)) \leq \sum_{i=1}^n \bar{S}(f_i, \delta)$, где $f = \sum_{i=1}^n f_i$, $\delta(n) = 1 - (1 - \delta)^n$;

в) $\bar{S}(\alpha f, \delta) = \bar{S}(f, \delta)$, где $\alpha > 0$;

г) если $f_1 = f_2$ почти всюду, то $\bar{S}(f_1, \delta) = \bar{S}(f_2, \delta)$;

д) $\bar{S}(f(\lambda + p), \delta) = \bar{S}(f(\lambda), \delta)$, где p вещественно.

Те же соотношения имеют место и для функционала $\underline{S}$. Аналогичными свойствами (кроме свойства д) обладают функционалы Шеннона вещественных процессов.

Доказательство. а) Пусть $\xi(t)$ — гауссовский стационарный процесс со спектральной плотностью $f(\lambda)$. Легко показать, что процесс $\xi_\alpha(t) = \alpha^{1/2} \xi(\alpha t)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda/\alpha)$. Если функции $x_i(t) \in \mathcal{F}$, $i \in I$, образуют по метрике $B(-T, T)$ ϵ, δ -сеть для процесса $\xi(t)$, то функции $\alpha^{1/2} x_i(\alpha t) \in \mathcal{F}$ образуют по метрике $B(-T/\alpha, T/\alpha)$ $\alpha^{1/2} \epsilon, \delta$ -сеть для процесса $\xi_\alpha(t)$. Отсюда легко получить, что $N_{\xi_\alpha}(\alpha^{1/2} \epsilon, \delta, T/\alpha) = N_\xi(\epsilon, \delta, T)$, откуда следует необходимое соотношение.

б) Пусть $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ — попарно некоррелированные гауссовские стационарные процессы со спектральными плотностями $f_1(\lambda), \dots, f_n(\lambda)$ соответственно. Легко показать, что гауссовский стационарный процесс $\xi(t) = \xi_1(t) + \dots + \xi_n(t)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda) = \sum_{i=1}^n f_i(\lambda)$.

Предположим, что функции $x_1^i, \dots, x_{N_i}^i \in \mathcal{F}$ ($N_i = N_{\xi_i}(\epsilon, \delta, T)$, $i = 1, \dots, n$) образуют по метрике $B(-T, T)$ ϵ, δ -сеть для процесса $\xi_i(t)$ (из доказанного выше свойства а) и предложения 1 следует, что все величины N_i конечны).

Тогда $x_{k_1, \dots, k_n}(t) = \sum_{i=1}^n x_{k_i}^i(t)$, где $k_i = 1, \dots, N_i$, образуют по метрике $B(-T, T)$

$n\epsilon, \delta(n)$ -сеть для процесса $\xi(t)$. Следовательно,

$$N_{\xi}(n\epsilon, \delta(n), T) \leq \prod_{i=1}^n N_{\xi_i}(\epsilon, \delta, T),$$

откуда получаем необходимое соотношение.

Остальные свойства функционалов Шеннона доказываются по той же схеме.

Используя предложения 1—3, нетрудно доказать теорему.

3°. З а м е ч а н и я. 1) Условие ограниченности спектра случайных процессов в формулировке теоремы существенно.

2) Пусть $\eta(t)$ — вещественный гауссовский стационарный процесс с регулярной спектральной плотностью $g(\lambda) \in \mathcal{K}, 0 < \delta < 1$.

Величины

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\eta}(\epsilon, \delta, T)}{2T} \quad \text{и} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log M_{\eta}(\epsilon, \delta, T)}{2T}$$

можно рассматривать как верхнюю и нижнюю скорости передачи информации о процессе $\eta(t)$ с точностью ϵ и вероятностью $1 - \delta$. Поэтому утверждение теоремы означает, что определенная разумным образом скорость передачи информации о процессе $\eta(t)$ должна быть сильно эквивалентна (при $\epsilon \rightarrow 0$) величине

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\epsilon} \text{mes } G(g).$$

В теории передачи информации получило большее распространение другое понятие скорости передачи информации, основанное на понятии количества информации, содержащемся в одном случайном процессе относительно другого ⁽⁵⁾. В соответствии с этим определением для гауссовских стационарных процессов определяется наименьшая скорость $H_{\epsilon}(\eta)$ передачи информации о процессе $\eta(t)$, имеющем спектральную плотность $g(\lambda)$, при условии выполнения ϵ -близости вида: $M(\eta(t) - \eta'(t))^2 \leq \epsilon^2$. Величина скорости была вычислена М. С. Пинскером ⁽⁶⁾. Из формул М. С. Пинскера следует, что при $\epsilon \rightarrow 0$ величина $H_{\epsilon}(\eta)$ сильно эквивалентна

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\epsilon} \text{mes } G(g).$$

Таким образом, введенные различными способами скорости передачи информации о случайном процессе оказались сильно эквивалентными друг другу.

В заключение автор благодарит В. М. Тихомирова за постановку задачи и внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 IX 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ К. Шеннон, Работы по теории информации и кибернетике, 1963. ² И. И. Гихман, А. В. Скороход, Теория случайных процессов, т. 1, 1971. ³ А. Н. Колмогоров, ДАН, т. 108, № 3, 385 (1956). ⁴ В. М. Тихомиров, ДАН, т. 117, № 2, 191 (1957). ⁵ И. М. Гельфанд, А. Н. Колмогоров, А. М. Яглом, ДАН, т. 111, № 4, 745 (1956). ⁶ М. С. Пинскер, ДАН, т. 111, № 4, 753 (1956).