

З. А. ШТЕЙНГРАД

К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ КОШИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ВЫБОРЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 27 VI 1975)

1. Система отсчета задана: если задана конгруэнция мировых линий частиц, ее составляющих (или, что то же, линий времени этой системы отсчета). При этом целесообразно пользоваться аппаратом хронометрических инвариантов (х.и.) ⁽¹⁾. Однако выбор конгруэнции мировых линий этих частиц не накладывает ограничений на выбор пространственных сечений ($x^0 = \text{const}$), выбор же конгруэнции пространственных сечений позволяет пользоваться аппаратом кинематических инвариантов (к.и.) ⁽²⁾. Отметим, что в х.и. преобразования координат, не выводящие за пределы исследуемой системы отсчета, имеют вид

$$x'^0 = x'^0(x^\alpha), \quad x'^h = x'^h(x^i),$$

в то время как в к.и. при фиксированном выборе пространственных сечений, допустимы преобразования $x'^0 = x'^0(x^0)$ и $x'^i = x'^i(x^\alpha)$. Греческие индексы пробегает значения 1, 2, 3, 0, а латинские — 1, 2, 3.

Из определений х.и. и к.и. формализмов, данных в ⁽¹⁾ и ⁽²⁾, ясно, что любые соотношения, построенные из к.и. величин, могут быть введены в произвольной наперед заданной системе отсчета.

2. Постановка задачи Коши в теории тяготения Эйнштейна подробно изучалась Лихнеровичем ⁽³⁾, Франклем ⁽⁴⁾, Петровым ⁽⁵⁾ (при этом на пространственном сечении $x^0 = \text{const}$ задавались (как функции пространственных координат) компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ и их первые производные по временной координате x^0). Однако в этих работах задача Коши рассматривалась в специально выбранных системах координат (гармонических и синхронных), которые могут быть введены не во всякой системе отсчета. Укажем, что при использовании синхронных координат (где $g_{0i} = 0$ и $g_{00} = 1$) х.и. и к.и. формализмы совпадают.

Важность выбора определенной системы отсчета (или класса систем отсчета ^(6, 7)) для решения задач теории тяготения Эйнштейна и физической интерпретации полученных результатов приводит к необходимости переформулировки постановки задачи Коши таким образом, чтобы она могла быть поставлена в любой системе отсчета.

В настоящей работе показано, что постановку задачи Коши при произвольном выборе системы отсчета следует осуществлять на основе формализма к.и. Как указано в ⁽²⁾, задача Коши является одной из основных областей применения к.и. Заметим, что в силу неголономности трехмерного пространства отсчета задача Коши не может быть сформулирована в х.и. (за исключением, как отмечалось выше, случая синхронных координат).

3. На одном из пространственных сечений $x^0 = \text{const}$ изучаемого пространства сечений можно задать двенадцать к.и. величин

$$h_{ik}|_{x^0=\text{const}} = -g_{ik}|_{x^0=\text{const}} = h_{ik}(x^1, x^2, x^3); \quad (1)$$

$$D_{ik}|_{x^0=\text{const}} = 1/2 \left\{ \sqrt{g^{00}} \left[\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^0} + h_{jk} \nabla_i \frac{g^{0j}}{g^{00}} + h_{ji} \nabla_k \frac{g^{0j}}{g^{00}} \right] \right\}_s = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{ik}}{\partial t} \Big|_{x^0=\text{const}} \quad (2)$$

где h_{ik} и D_{ik} — коэффициенты первой и второй квадратичных форм пространственного сечения $x^0 = \text{const}$ соответственно. Кроме того, если рассматривается пространство-время с материей, то на сечении $x^0 = \text{const}$ можно задать еще четыре к.и. величины

$$\rho|_{x^0=\text{const}} \equiv T^{00}(g^{00})_s^{-1} = \rho_s(x^1, x^2, x^3); \quad (3)$$

$$J_i|_{x^0=\text{const}} \equiv T_i^0(g^{00})_s^{-1/2} = J_i(x^1, x^2, x^3), \quad (4)$$

где ρ — к.и. плотность массы, J_i — к.и. плотность потока энергии, а T^{00} , T_i^0 — компоненты мирового тензора энергии-импульса.

Уравнения Эйнштейна и уравнения закона энергии и импульса, из них следующие и записанные через к.и. величины, имеют вид

$$\frac{\circ}{\partial t} D + D_{ik} D^{ik} + \nabla_i F^i - F_i F^i = -\frac{\kappa}{2}(\rho + U); \quad (5)$$

$$\nabla_i (h^{ik} D - D^{ik}) = \kappa J^k; \quad (6)$$

$$\frac{\circ}{\partial t} D_{ik} - 2D_{ij} D_k^j + DD_{ik} + \nabla_i F_k - F_i F_k - H_{ik} = \frac{\kappa}{2}(\rho h_{ik} - 2U_{ik} - U h_{ik}); \quad (7)$$

$$\frac{\circ}{\partial t} \rho + D\rho + D_{ik} U^{ik} + (\nabla_i - F_i) J^i - F_i J^i = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\circ}{\partial t} J^i + DJ^i + 2D_k^i J^k - (\nabla_k - F_k) U^{ik} - \rho F^i = 0; \quad (9)$$

здесь $D = h^{ik} D_{ik}$, $F_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \ln \sqrt{g^{00}}$ — взятый с обратным знаком к.и. вектор ус-

корения пространства сечений относительно локально геодезической системы координат с пространственным сечением, касательным к данному пространству сечений в каждой его точке, $U_{ik} \equiv T_{ik}$ — к.и. плотность потока импульса, H_{ik} — тензор кривизны данного пространства сечений.

К.и. оператор дифференцирования по времени, примененный к произвольному к.и. тензору второго ранга θ_{ik} , имеет вид

$$\frac{\circ}{\partial t} \theta_{ik} = \sqrt{g^{00}} \left[\frac{\partial \theta_{ik}}{\partial x^0} + \frac{g^{0j}}{g^{00}} \nabla_j \theta_{ik} + \theta_{jk} \nabla_i \frac{g^{0j}}{g^{00}} + \theta_{ji} \nabla_k \frac{g^{0j}}{g^{00}} \right]. \quad (10)$$

К.и. пространственные производные любого порядка от h_{ik} , D_{ik} , ρ и J_i могут быть получены, как и в стандартном методе, непосредственным дифференцированием данных Коши (1) — (4), выбор которых, как известно, не может быть произвольным: во-первых, данные Коши должны удовлетворять трем уравнениям (6), не содержащим производных по времени от h_{ik} , D_{ik} ; во-вторых, данные Коши связаны еще одним уравнением, которое может быть получено вычитанием уравнения (5) из свернутого по i, k уравнения (7), и имеет вид

$$D^2 - D_{ik} D^{ik} - H = 2\kappa\rho. \quad (11)$$

Вторые к.и. производные по времени от h_{ik} (или, что аналогично, первые к.и. производные от D_{ik}) и первые от ρ и J_i могут быть найдены из (7) — (9) при условии выполнения к.и. сигнатурных условий

$$g^{00} > 0, \quad -g^{00} g^{11} + (g^{0i})^2 > 0, \quad g^{-1} g_{33} > 0, \quad -g^{-1} > 0,$$

необходимых для применения формализма к.и. Это означает, что характеристические пространственные сечения (являющиеся изотропными гиперповерхностями) в рамках аппарата к.и. рассмотрены быть не могут. Следует отметить, что величины F_i и U_{ik} могут быть заданы во всем про-

странстве-времени, что в силу их к.и. инвариантности, не повлечет за собой ограничений на выбор системы отсчета.

Задание величин $F_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \ln \sqrt{g^{00}}$ позволяет, очевидно, задать g^{00} с точностью до произвольного множителя, зависящего от x^0 .

Для того чтобы иметь возможность находить к.и. производные по времени порядка, превышающего второй, от к.и. тензоров с наибольшим рангом, равным двум (каковые только и входят в уравнения Эйнштейна); необходимо знать двенадцать величин $V_i(g^{0k}/g^{00})$ и g^{0i}/g^{00} . Эти величины могут быть найдены из двенадцати функционально независимых алгебраических уравнений (2) и (7), так как они явным образом определяют к.и. производные по времени от величин h_{ik} и D_{ik} , значения которых, вообще говоря, независимы. Прделав все описанные выше процедуры в некоторой системе отсчета, можно представить решения уравнений Эйнштейна в виде рядов по степеням x^0 , которые, очевидно, уже не будут носить к.и. характера.

В заключение заметим, что возможность одновременного выбора системы отсчета и конгруэнции пространственных сечений позволяет при рассмотрении гамильтонова формализма (представляющего собой важную область применения к.и.), как и в случае задачи Коши, ограничиваться использованием только аппарата к.и.

Автор выражает искреннюю благодарность А. Л. Зельманову за внимание к работе и ценные замечания.

Государственный астрономический институт
им. П. К. Штернберга
Москва

Поступила
17 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Л. Зельманов, ДАН, т. 107, № 6, 815 (1956). ² А. Л. Зельманов, ДАН, т. 209, № 4, 822 (1973). ³ А. Licnerowicz, Theories relativites de la gravitation et de l'electromagnetisme, Paris, 1954. ⁴ Ф. И. Франкль, УМН, т. 11, в. 3 (1954). ⁵ А. З. Петров, Новые методы в общей теории относительности, М., 1966. ⁶ З. А. Штейнград, ДАН, т. 204, № 4, 831 (1972). ⁷ З. А. Штейнград, ДАН, т. 217, № 6, 1296 (1974).