

А. В. БОБЫЛЕВ

О РАЗЛОЖЕНИИ ИНТЕГРАЛА СТОЛКНОВЕНИЙ БОЛЬЦМАНА В РЯД ЛАНДАУ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 8 VIII 1975)

Рассматривается задача о разложении интеграла столкновений Больцмана для произвольных потенциалов взаимодействия в ряд по степеням переданного при столкновении импульса (будем называть его рядом Ландау). Известно ⁽¹⁾, что уже в первых членах такого разложения возникают расходящиеся интегралы. Расходимость при больших прицельных параметрах характерна только для кулоновского потенциала и не может быть устранена в рамках уравнения Больцмана. Везде ниже предполагается, что потенциал взаимодействия убывает на больших расстояниях быстрее кулоновского. Тогда может возникнуть только расходимость при малых прицельных параметрах, которую обычно объясняют тем, что предположение о малой передаче импульса становится неверным для близких столкновений. В действительности, как будет показано ниже, появление этой расходимости связано с неточностью способа разложения. В заметке проведено точное (не содержащее расходимостей) разложение интеграла столкновений в ряд Ландау, найден явный вид общего члена этого ряда и исследованы его свойства. Первый член ряда является уточнением обычного интеграла столкновений Ландау (который для различных потенциалов взаимодействия отличается только постоянным множителем).

1. Пусть $f(\mathbf{v})$ и $g(\mathbf{v})$ — функции распределения по скоростям частиц с массами M и m соответственно. Интеграл столкновений имеет вид

$$I[f, g] = \int d\mathbf{w} d\mathbf{n} \sigma(u, \theta) u [f(\mathbf{v}') g(\mathbf{w}') - f(\mathbf{v}) g(\mathbf{w})], \quad (1)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$, $\sigma(u, \theta)$ — дифференциальное сечение рассеяния на угол θ в системе центра масс, $\mathbf{n}$ — единичный вектор направления относительной скорости частиц после столкновения.

После простых преобразований (1) можно переписать в виде

$$I[f, g] = \int d\mathbf{w} d\mathbf{k} \delta\left(\mathbf{k}\mathbf{u} + \frac{\mathbf{k}^2}{2}\right) \omega(u, k) \left\{ f\left(\mathbf{v} + \frac{\mu}{M} \mathbf{k}\right) g\left(\mathbf{w} - \frac{\mu}{m} \mathbf{k}\right) - f(\mathbf{v}) g(\mathbf{w}) \right\}, \quad (2)$$

где

$$\mu = \frac{Mm}{M+m}, \quad \omega(k, u) = \sigma\left(u, \arccos\left[1 - \frac{k^2}{2u^2}\right]\right), \quad 0 \leq k \leq 2u.$$

Разлагая выражение в фигурных скобках в (2) по степеням $\mathbf{k}$, получим (здесь и ниже по повторяющимся тензорным индексам проводится суммирование)

$$I[f, g] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d\mathbf{w} T_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{u}) \frac{\partial^n}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_n}} f(\mathbf{v}) g(\mathbf{w}), \quad (3)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = \frac{\mu}{M} \frac{\partial}{\partial v_i} - \frac{\mu}{m} \frac{\partial}{\partial w_i}, \quad T_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{u}) = \int d\mathbf{k} \omega(u, k) \delta\left(\mathbf{k}\mathbf{u} + \frac{\mathbf{k}^2}{2}\right) k_{i_1} \dots k_{i_n} \dots \quad (4)$$

Остается провести степенное разложение подынтегрального выражения в (4). Если попытаться разложить δ -функцию по степеням k (как это сделано, например, в (2)), то уже в первом приближении возникнет расходимость интеграла (4) при больших значениях k . Действительно, δ -функция в (4) выражает закон сохранения энергии и, в частности, определяет верхний предел передачи импульса $|\Delta \mathbf{p}| = \mu k \leq 2\mu u$. Разложение δ -функции приводит к нарушению этого закона, становятся возможными как угодно большие передачи импульса, вследствие чего и возникает расходимость. Эту трудность можно обойти, если свести тензорный интеграл (4) к скалярным. В результате получим точную формулу (3)

$$T_{i_1 \dots i_n}(u) = 2\pi \int_0^{2u} dk \omega(u, k) \sum_{l=0}^{[n/2]} \frac{2^{2l-n} k^{2n-2l+1}}{(2l)!(n-2l)!} \frac{\partial^n u^{2l-1}}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_n}}. \quad (5)$$

Здесь не проведено разложения сечения $\omega(u, k)$ по степеням k , поскольку это разложение зависит от конкретного вида потенциала взаимодействия. Если известен явный вид функции $\omega(u, k)$, то полное разложение можно легко получить из формулы (5).

Подставляя (5) в (3) и собирая члены с одинаковыми степенями k (под знаком интеграла), окончательно получим

$$I[f, g] = \sum_{n=1}^{\infty} I_n[f, g], \quad (6)$$

где

$$I_n[f, g] = \sum_{l=0}^n \frac{2^{n+l}}{(n+l)!(2l)!(n-l)!} \int dw \sigma_n(u) u^{2n+2} \frac{\partial^{n+l} u^{2l-1}}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_{n+l}}} \times \\ \times \frac{\partial^{n+l}}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_{n+l}}} f(\mathbf{v}) g(\mathbf{w}); \quad (7)$$

$$\sigma_n(u) = \int d\mathbf{n} \sigma(u, \theta) \sin^{2n} \frac{\theta}{2} = \frac{2\pi}{2^{2n} u^{2n+2}} \int_0^{2u} dk \omega(u, k) k^{2n+1}. \quad (8)$$

Во многих случаях удобно вместо (7) использовать дивергентную форму записи общего члена ряда Ландау

$$I_n[f, g] = \sum_{l=0}^n \frac{(-2)^{n+l}}{(n+l)!(2l)!(n-l)!} \left(\frac{\mu}{M} \right)^{n+l} \frac{\partial^{n+l}}{\partial v_{i_1} \dots \partial v_{i_{n+l}}} \times \\ \times f(\mathbf{v}) \int dw g(\mathbf{w}) \sigma_n(u) u^{2n+2} \frac{\partial^{n+l} u^{2l-1}}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_{n+l}}}.$$

Перечислим основные свойства ряда (6):

(А) каждый член ряда $I_n[f, g]$, $n=1, 2, \dots$, удовлетворяет законам сохранения числа частиц, импульса и энергии:

$$\int d\mathbf{v} I_n[f, g] = 0, \quad \int d\mathbf{v} \{M\mathbf{v} I_n[f, g] + m\mathbf{v} I_n[g, f]\} = 0,$$

$$\int d\mathbf{v} \{Mv^2 I_n[f, g] + mv^2 I_n[g, f]\} = 0;$$

(В) каждый член ряда $I_n[f, g]$, $n=1, 2, \dots$, обращается в ноль равновероятными распределениями Максвелла:

$$I_n[f_0, g_0] = 0, \quad f_0(\mathbf{v}) = N_0 \left(\frac{M}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{Mv^2}{2T} \right)$$

$$g_0(\mathbf{v}) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2T} \right);$$

(С) сумма N первых членов ряда приводит к правильным выражениям для $(N+1)$ первых тензорных моментов интеграла столкновений

$$\int d\mathbf{v} v_{i_1} \dots v_{i_n} I[f, g] = \sum_{k=1}^N \int d\mathbf{v} v_{i_1} \dots v_{i_n} I_k[f, g], \quad n=0, 1, \dots, N.$$

2. Ниже для краткости ограничимся случаем одинаковых частиц ($f(\mathbf{v})=g(\mathbf{v})$, $M=m$). Единственной величиной, зависящей от потенциала взаимодействия $U(r)$, является в формуле (7) для n -го члена ряда Ландау интегральное сечение $\sigma_1(u)$. Можно показать (используя в качестве типичной функции распределения максвелловскую экспоненту и рассматривая любое слагаемое суммы (7)), что относительный порядок n -го члена ряда (6) определяется величиной сечения $\sigma_n(v_T)$, где $v_T = (2T/m)^{1/2}$ — характерная тепловая скорость. Нетрудно убедиться в том, что для монотонно невозрастающих и ограниченных в нуле потенциалов $U(r)$ имеет место неравенство

$$\sigma_n(v_T) \leq \left[\frac{U(0)}{T} \right]^{n-1} \sigma_1(v_T), \quad n=2, 3, \dots$$

Следовательно, для таких потенциалов ряд Ландау (6) можно рассматривать как разложение по степеням малого параметра (если температура газа достаточно велика).

3. Первый член ряда (6) удобно записать в виде

$$I_1[f, f] = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial v_i} \int d\mathbf{w} \sigma_1(u) u (u^2 \delta_{ij} - u_i u_j) \left(\frac{\partial}{\partial v_j} - \frac{\partial}{\partial w_j} \right) f(\mathbf{v}) f(\mathbf{w}). \quad (9)$$

Сравним его с обычным интегралом столкновений Ландау ⁽²⁾

$$I_L[f, f] = B \frac{\partial}{\partial v_i} \int d\mathbf{w} \frac{u^2 \delta_{ij} - u_i u_j}{u^3} \left(\frac{\partial}{\partial v_j} - \frac{\partial}{\partial w_j} \right) f(\mathbf{v}) f(\mathbf{w}), \quad (10)$$

где постоянная B зависит от потенциала взаимодействия $U(r)$:

$$B = \frac{8\pi^5}{m^2} \int_0^\infty dk k^3 U_k^2, \quad U_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} U(r). \quad (11)$$

Интегралы (9) и (10) совпадают, если в (9) положить

$$\sigma_1(u) = \int d\mathbf{n} \sigma(u, \theta) \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{32\pi^5}{m^2 u^4} \int_0^\infty dk k^3 U_k^2.$$

Правую часть этого равенства можно интерпретировать как приближенную формулу для сечения $\sigma_1(u)$; ее можно получить обычным методом ⁽⁴⁾ (в предположении, что рассеяние происходит только на малые углы) или вычислением квантовомеханического сечения в борновском приближении с последующим переходом к классическому пределу. При выводе этой формулы по существу дополнительно предполагается, что сечение $\sigma_1(u)$ (или угол рассеяния θ) может быть представлено в виде ряда по степеням величины $\varepsilon = 2U(r)/mu^2$. Во многих случаях это предположение не выполняется (например, для прямоугольного потенциального барьера сечение $\sigma_1(u)$ имеет логарифмическую особенность при $\varepsilon=0$), вследствие чего интеграл (11) для постоянной B расходится и интеграл Ландау (10) теряет смысл. В то же время интеграл (9) имеет смысл во всех случаях, когда конечное (точное) сечение $\sigma_1(u)$, т. е. приближенный интеграл столк-

повений (9) можно использовать в более широкой области, чем обычный интеграл Ландау (10).

Полные доказательства сформулированных выше утверждений содержатся в (3). Автор благодарен М. В. Масленникову и В. А. Чуянову за многочисленные полезные обсуждения.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
1 VII 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, т. 7, № 2, 203 (1937). ² В. П. Силин, Введение в кинетическую теорию газов, «Наука», 1971. ³ А. В. Бобылев, Приближение Ландау в кинетической теории газов и плазмы, Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР № 76, 1974. ⁴ Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, Механика, «Наука», 1965.