

В. К. ДЗЯДЫК

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ К ПОЛУЧЕНИЮ ПРЯМЫХ ТЕОРЕМ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. М. Никольским 10 VI 1975)

1°. В работах (¹, ²) введены так называемые множества типа (B) и на таких множествах, во-первых, установлены прямые теоремы и, во-вторых, на подклассе множеств типа (B) , являющихся замкнутыми областями, получена конструктивная характеристика классов функций Гёльдера $W^r H^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, и Зигмунда $W^r Z$, $r = 0, 1, 2, \dots$

Множества типа (B) в (¹, ²) введены аксиоматически при помощи ряда условий на отображающую функцию Римана. Поэтому было очень трудно представить себе геометрическую природу таких множеств, и без глубокого проникновения в их определение могло показаться (см., например, (²)), что к классу таких множеств принадлежат только множества с кусочно-гладкой границей. Первый существенный шаг для исследования таких множеств принадлежит В. И. Белому и В. М. Миклюкову (²), которые, широко обобщая результаты работы (³), неявно установили, что первые два свойства множеств типа (B) могут быть исследованы при помощи применения ряда тонких результатов из теории квазиконформных отображений. Третье свойство множеств типа (B) в (²) было оставлено без внимания и вместо него введено значительно более узкое свойство и на этой базе установлены прямые теоремы для выпуклых замкнутых областей.

Используя результаты работ (¹, ², ⁵), а также некоторые факты из теории квазиконформных отображений, в настоящей статье устанавливается, что классу (B) принадлежит, в частности, всякая область G , на границе которой длина кратчайшей из дуг, соединяющих любые две точки из ∂G , не превышает постоянной, умноженной на длину соответствующей хорды. Легко сообразить, что у таких областей может существовать бесконечное число угловых точек, углы в которых могут быть как большими, так и меньшими π .

2°. Из-за недостатка места приведем только самые главные, нужные в дальнейшем сведения, широко пользуясь при этом понятиями и фактами, которые содержатся в (¹, ⁴, ²).

Рассмотрим произвольное замкнутое множество $\mathfrak{M}$ комплексной плоскости, у которого $\text{diam } \mathfrak{M} > 0$ и дополнение которого $G_\infty = C \setminus \mathfrak{M}$ до расширенной плоскости есть односвязная область, содержащая бесконечно удаленную точку. Пусть $z_0 \in \partial G_\infty$ — достижимая граничная точка, $s(x)$, $x \in (0, \frac{1}{2} \text{diam } \mathfrak{M})$, — дуга окружности $\{\xi: |\xi - z_0| = x\}$, принадлежащая G_∞ и отделяющая в G_∞ от ∞ , $Q(z_0, \delta, \Delta) = Q[z_0, s(\delta), s(\Delta)]$ — четырехсторонник, ограниченный дугами $s(\delta)$, $s(\Delta)$ и соединяющими их концы дугами границы G_∞ ($0 < \delta \leq \Delta \leq \frac{1}{2} \text{diam } \mathfrak{M}$, $Q(z_0, \delta, \Delta) \subset G_\infty$), $\{\gamma\}$ — семейство всех локально спрямляемых кривых в $Q(z_0, \delta, \Delta)$, разделяющих выделенные стороны $s(\delta)$ и $s(\Delta)$, $\lambda(\{\gamma\}) = \lambda(z_0, \delta, \Delta)$ — экстремальная длина $\{\gamma\}$. Тот же смысл имеют эти обозначения, если вместо $z_0 \in \partial G_\infty$ взять некоторую точку $z \in G_\infty$, для которой выполнено условие

$$\min_{\xi \in \partial G} |\xi - z| \leq \delta \leq \Delta.$$

Конформное отображение $w=\Phi(z)$ области G_∞ в $|w|>1$, нормированное условием

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0,$$

обладает следующим свойством.

Теорема 1 ⁽²⁾. Если граница ∂G_∞ области G_∞ представляет собой квазиконформную кривую (и даже если $\Phi(z)$ обладает слабым (К)-свойством ⁽²⁾), то при постоянном $\Delta \in (0, \frac{1}{2} \text{diam } \mathbb{M})$ и достаточно малых $\delta \in (0, \Delta)$ для всяких $z_0 \in \partial G_\infty$ и $z \in s(\delta) \cap G_\infty$ имеет место соотношение

$$|\Phi(z_0) - \Phi(z)| \asymp \exp \left\{ -\frac{\pi}{\lambda(z_0, \delta, \Delta)} \right\}. \quad (1)$$

Введем метрическую характеристику четырехсторонника $Q[z, s(\delta), s(\Delta)]$, $0 < \delta < \Delta$. Функцию, обратную к $w=\Phi(z)$, обозначим через $z=\Psi(w)$. Через $\rho_{1+\sigma}(z)$, $\sigma > 0$, обозначим расстояние от точки $z \in \partial \mathbb{M}$ до линии уровня $\Gamma_{1+\sigma} = \{\xi: |\Phi(\xi)| = 1 + \sigma\}$.

Определение 1 ⁽²⁾. Функция

$$A(z, \delta, \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \lambda(z, \delta, \Delta) \ln \frac{\Delta}{\delta}, \quad (2)$$

$z \in \bar{G}_\infty$ при $\rho(z, \mathbb{M}) < \delta$ называется раствором четырехсторонника $Q[z, s(\delta), s(\Delta)]$. Легко убедиться, что если $Q(z, \delta, \Delta)$ — прямолинейный кольцевой сектор, образующий угол θ в точке z , то $A(z, \delta, \Delta) = \theta$. Таким образом, функция $A(z, \delta, \Delta)$ обобщает понятие раствора кольцевого сектора.

Лемма 1 ⁽²⁾. Пусть $z \in \partial G_\infty$, ∂G_∞ — ограниченная квазиконформная кривая, $w=\Phi(z)$, $U_t = \{\tau: |\tau| \geq 1, |\tau - w| = t > 0\}$, $\Psi(U_t)$ — образ дуги U_t при отображении $z=\Psi(w)$, ξ — произвольная точка четырехсторонника $Q_t = Q[z, s(\min_{\tau \in U_t} |\Psi(\tau) - z|), s(\max_{\tau \in U_t} |\Psi(\tau) - z|)]$.

Тогда при всех достаточно малых t

$$A(z, |z - \xi|, \Delta) = \alpha(z, t, \Delta) + \frac{\varepsilon(z, \xi, \Delta)}{\ln t}, \quad (3)$$

где $\alpha(z, t, \Delta)$ — положительная непрерывная по t функция, зависящая только от указанных аргументов, а $\varepsilon(z, \xi, \Delta) = O(1)$.

Определение 2. Функцию $\alpha(z, t, \Delta)$, $z \in \partial \mathbb{M}$, $0 < t < \Delta$, мы будем называть обобщенным (t, Δ) -углом множества $\mathbb{M}$ в точке z .

З⁰. Приведем основную в данной работе теорему, которая дает широкие достаточные геометрические условия принадлежности области к классу (B).

Теорема 2. Для того чтобы ограниченная замкнутая односвязная область G принадлежала классу (B), достаточно, чтобы для нее выполнялись следующие два условия:

1) граница ∂G области G является спрямляемой и обладает тем свойством, что на ней длина кратчайшей из дуг, соединяющих любые ее две точки z_1 и z_2 , имеет тот же порядок, что и длина хорды, которая соединяет эти точки:

$$\text{mes } \widetilde{z_1 z_2} \leq A |z_1 - z_2|, \quad A = \text{const}; \quad (4)$$

2) существует постоянная $\Delta \in (0, \frac{1}{2} \text{diam } G)$ такая, что при всех $z \in \partial G$ и любых $\delta, \delta' \in (0, \Delta)$ при $\delta < \delta'$ выполняется неравенство

$$A(z, \delta, \delta') \geq c, \quad (5)$$

где c — положительная постоянная.

Замечание. Условие 2), по-видимому, является следствием условия 1). Во всяком случае, оно всегда будет выполнено, если, какова бы

ни была точка $z \in \partial G$, равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными Δ , и с углом при вершине, равным c , можно так расположить в дополнительной к G замкнутой области CG , чтобы его вершина находилась в точке z .

Приведем без доказательства леммы, которые используются при установлении теоремы 2.

Лемма 2. Если для области G выполнены условия теоремы 2, то в любой точке z из ∂G при всех достаточно малых $t > 0$ и всех $u \in [t', t^{c/r}]$, где t' — точка, определяемая условием $\max_{\tau \in U_t} |\Psi(\tau) - z| = \min_{\tau \in U_{t'}} |\Psi(\tau) - z|$, и r — какое-нибудь фиксированное натуральное число, имеет место равенство

$$\alpha(z, t, \Delta) - \alpha(z, u, \Delta) = \frac{\ln(u/t)}{\ln(1/t)} [A_z^* - \alpha(z, u, \Delta)] + r(z, t, u),$$

в котором величина

$$A_z^* \in [c, 2], \quad |r(z, t, u)| \leq \frac{A}{\ln(1/t)},$$

где постоянная A не зависит ни от z , ни от t .

Лемма 3. Если $\xi = z_n$, то при любом $u \in (0, \pi]$

$$\alpha(z, u, \Delta) - \alpha(\xi, u, \Delta) = O\left(1 / \ln \frac{10}{u}\right).$$

Лемма 4. Если $u \in [t, At]$, $t = 1/n$, где A — натуральное число > 1 , то для любых $z \in \partial \mathfrak{M}$ и натуральных n имеет место соотношение

$$\rho_{1+1/n}^{\text{def}}(z) \asymp \rho_{1+1/n}(z_n).$$

Если $\xi \in \partial \mathfrak{M}$, то обозначим $\tilde{\xi} = \Psi[(1+1/n)\Phi(\xi)]$.

Лемма 5. Положим в условиях теоремы 2 $k = [2/c] + 2$ и $r = 4(k-1)c / (kc-2)$.

Тогда, какова бы ни была точка $z \in \partial \mathfrak{M}$, во всех точках $\xi \in \partial \mathfrak{M}$, каждая из которых обладает тем свойством, что число $u \in [-\pi, \pi]$, являющееся корнем уравнения $\rho_{1+|u|}^{\text{def}}(z) = |\tilde{\xi} - z|$, удовлетворяет условию $|u| \geq t^{c/r}$, $t = 1/n$, будет выполняться неравенство

$$|\tilde{\xi} - \xi|^k \leq A |\tilde{z} - z| |\tilde{\xi} - z|^{k-1}.$$

Поскольку любая замкнутая ограниченная односвязная область с гладкой границей, очевидно, принадлежит классу (B) , то в качестве следствия из прямых теорем приближения ⁽⁵⁾ и теоремы 2 вытекает следующий результат.

Теорема 3 (о конструктивной характеристике функций в области с гладкой границей). Для того чтобы функция $f(z)$, непрерывная в замкнутой ограниченной односвязной области $\bar{G}$ с гладкой границей и аналитическая в $G = \text{int } \bar{G}$ при некотором целом $r \geq 0$, принадлежала классу $W^r H^\alpha$, если $0 < \alpha < 1$, и классу $W^r Z$, если $\alpha = 1$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $n = r+1, r+2, \dots$ нашелся алгебраический многочлен $P_n(z)$ степени $\leq n$ такой, чтобы при всех $z \in \partial G$ выполнялось неравенство

$$|f(z) - P_n(z)| \leq A [\rho_{1+1/n}(z)]^{r+\alpha},$$

где A — положительная постоянная, которая не зависит ни от n , ни от z .

Отметим, что необходимые условия этой теоремы при $r=0$ представляют собой усиление результата С. Н. Мергеляна ⁽⁶⁾, в котором установлено, что если $f(z) \in H^\alpha$, то при любом $\varepsilon > 0$ для каждого $n=1, 2, \dots$ найдется

алгебраический многочлен $P_n(z)$ степени $\leq n$ такой, что при любом $z \in \bar{G}$

$$|f(z) - P_n(z)| \leq An^{-\alpha+\varepsilon}.$$

Примечание при корректуре. Можно доказать, что в теореме 2 условие 2) действительно является следствием условия 1).

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
24 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Альфорс, Лекции по квазиконформным отображениям, М., «Мир», 1969.
² В. И. Белый, В. М. Миклюков, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 38, 6, 1343 (1974).
³ В. К. Дзядык, Там же, т. 23, 4, 697 (1959). ⁴ В. К. Дзядык, Укр. матем. журн., т. 24, 1, 3 (1972). ⁵ В. К. Дзядык, Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 134 (1975). ⁶ С. Н. Мергелян, Там же, т. 37, 1 (1951).