

УДК 539.377

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Академик АН УССР Я. С. ПОДСТРИГАЧ, Ю. М. КОЛЯНО

УРАВНЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Рассмотрим слой, цилиндр и шар, физико-механические характеристики которых зависят от координаты ξ . Если в начальный момент времени тепловой поток в неоднородном теле отсутствует, то в случае одномерной задачи тепловой поток в рассматриваемых телах определяется из обобщенного закона Фурье ⁽¹⁾ таким образом:

$$q = - \int_0^{\tau} \varphi(\xi, \tau, \eta) \frac{\partial t(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta, \quad \varphi(\xi, \tau, \eta) = \frac{\lambda_t(\xi)}{\tau_q(\xi)} e^{(\eta-\tau)/\tau_q(\xi)}, \quad (1)$$

λ_t — коэффициент теплопроводности, τ_q — время релаксации теплового потока, τ — время, t — температура.

Подставив (1) в уравнение баланса тепла, приходим к интегродифференциальному уравнению обобщенной теплопроводности неоднородных тел

$$\frac{1}{\xi^m} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi^m \int_0^{\tau} \varphi(\xi, \tau, \eta) \frac{\partial t(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta \right] = c_t(\xi) \rho(\xi) \dot{t} - w, \quad (2)$$

где для слоя $m=0$, для цилиндра $m=1$, для шара $m=2$, c — удельная теплоемкость, ρ — плотность, w — плотность источников тепла, $\dot{t} = \partial t / \partial \tau$.

Подставляя в уравнение закона Гука неравномерно нагретых неоднородных тел в уравнение движения ⁽²⁾, получим для рассматриваемых тел уравнение термоупругости

$$\frac{1}{\xi^m} \left[\xi^m \frac{\partial u}{\partial \xi} - m \lambda(\xi) \frac{u}{\xi} \right] + 2\mu(\xi) \frac{m}{\xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{u}{\xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} [\psi(\xi) t] + \rho(\xi) \ddot{u}, \quad (3)$$

где

$$\lambda(\xi) = \frac{E(\xi) [1-\nu(\xi)]}{[1+\nu(\xi)] [1-2\nu(\xi)]}, \quad \psi(\xi) = \frac{\alpha_t(\xi) E(\xi)}{1-2\nu(\xi)},$$

$$\lambda(\xi) = - \frac{\nu(\xi) E(\xi)}{[1+\nu(\xi)] [1-2\nu(\xi)]},$$

E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, α_t — температурный коэффициент линейного расширения, λ и μ — постоянные Ляме.

Если слой, цилиндр и шар содержат инородные включения толщиной $2h$ (рис. 1, 2), физико-механические характеристики рассматриваемых кусочно-однородных тел можно представить в виде

$$p(\xi) = p_1 + (p_0 - p_1) N(\xi), \quad (4)$$

где

$$N(\xi) = S_-(\xi - R + h) - S_-(\xi - R - h), \quad S_+(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta > 0, \\ 0, & \eta \leq 0; \end{cases} \quad S_-(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta \geq 0, \\ 0, & \eta < 0. \end{cases}$$

Используя соотношения

$$S_+(\eta) S_+(\eta) = S_+(\eta), \quad S_-(\eta) S_-(\eta) = S_-(\eta),$$

для функций $f(\xi)$, $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$, $\lambda(\xi)$, $\mu(\xi)$, $c_t(\xi) \rho(\xi)$, фигурирующих в уравнениях (2), (3), получим представления

$$f(\xi) = f_1 + (f_0 - f_1)N(\xi), \quad \varphi(\xi) = \varphi_1 + (\varphi_0 - \varphi_1)N(\xi), \quad (5)$$

$$\psi(\xi) = \psi_1 + (\psi_0 - \psi_1)N(\xi), \quad \lambda(\xi) = \lambda_1 + (\lambda_0 - \lambda_1)N(\xi),$$

$$\mu(\xi) = \mu_1 + (\mu_0 - \mu_1)N(\xi),$$

$$c_t(\xi)\rho(\xi) = c_t^{(1)}\rho_1 + (c_t^{(0)}\rho_0 - c_t^{(1)}\rho_1)N(\xi),$$

совпадающие по виду с (4); здесь f_1 , f_0 и φ_1 , φ_0 , например, имеют вид

$$f_1 = \frac{E_1(1-\nu_1)}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}, \quad f_0 = \frac{E_0(1-\nu_0)}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)},$$

$$\varphi_1 = \frac{\lambda_i^{(1)}}{\tau_q^{(1)}} e^{(\eta-\tau)/\tau_q^{(1)}}, \quad \varphi_0 = \frac{\lambda_i^{(0)}}{\tau_q^{(0)}} e^{(\eta-\tau)/\tau_q^{(0)}}.$$

Поскольку толщина включений очень мала по сравнению с размерами рассматриваемых кусочно-однородных тел, в выражениях (5), (4) можно осуществить предельный переход при $h \rightarrow 0$, сохраняя постоянным приведенную теплопроводность $\Lambda_0 = \beta \lambda_i^{(0)}$ (для слоя $\beta = 2h$, для цилиндра $\beta = 4\pi R h$, для шара $\beta = 8\pi h(R^2 + h^2/3)$), плотность $\Omega_0 = \beta \rho_0$, жесткость на растяжение — сжатие $\mathcal{E}_0 = 3E_0$ включения. В результате для фигурирующих в уравнениях (2), (3) функций получим представления

$$\omega(\xi) = \omega_1 + \mathcal{E}_0 \omega^* \frac{\delta(\xi - R)}{l}, \quad \varphi(\xi) = \varphi_1 + \Lambda_0 \frac{\varphi^*}{l} \delta(\xi - R), \quad (6)$$

$$c_t(\xi)\rho(\xi) = c_t^{(1)} + \Omega_0(c_t^{(0)} - K_\rho c_t^{(1)}) \frac{\delta(\xi - R)}{l}, \quad \rho(\xi) = \rho_1 + \Omega_0(1 - K_\rho) \frac{\delta(\xi - R)}{l},$$

где через $\omega(\xi)$ обозначено $f(\xi)$, $\psi(\xi)$, $\mu(\xi)$, $\lambda(\xi)$, причем

$$f^* = \frac{1-\nu_0}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)} - K_E \frac{1-\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}, \quad \psi^* = \frac{\alpha_i^{(0)}}{1-2\nu_0} - K_E \frac{\alpha_i^{(1)}}{1-2\nu_1},$$

$$\mu^* = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\nu_0} - \frac{K_E}{1+\nu_1} \right), \quad \varphi^* = \frac{1}{\tau_q^{(0)}} e^{(\eta-\tau)/\tau_q^{(0)}} - \frac{K_\varphi}{\tau_q^{(1)}} e^{(\eta-\tau)/\tau_q^{(1)}}.$$

$$\lambda^* = \frac{\nu_0}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)} - K_E \frac{\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}, \quad c_t^{(1)} = c_t^* \rho_1, \quad K = \frac{\lambda_i^{(1)}}{\lambda_i^{(0)}},$$

$K_E = E_1/E_0$, $K_\rho = \rho_1/\rho_0$, $\delta(\eta)$ — дельта-функция Дирака, $l=1$ для слоя, $l=2\pi R$ для цилиндра и $l=4\pi R^2$ для шара.

Подставив (6) в уравнения (2), (3) и осуществив дифференцирование, приходим к таким уравнениям с сингулярными коэффициентами обобщенной термоупругости для тел с тонкими включениями:

$$\frac{1}{\xi_m} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi^m \int_0^{\partial t(\xi, \eta)} \frac{\partial t(\xi, \eta)}{\partial \xi} \varphi_1(\tau, \eta) d\eta \right] = c_t^* \dot{t} - w +$$

$$+ \Omega_0(c_t^{(0)} - K_\rho c_t^{(1)}) \delta(\xi - R) \frac{\dot{t}|_{\xi=R}}{\gamma} -$$

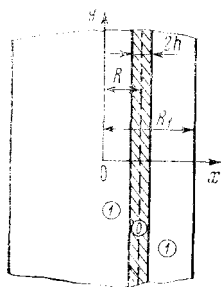


Рис. 1

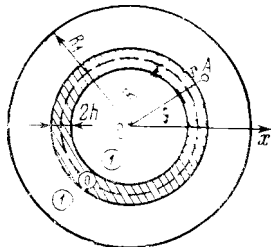


Рис. 2

$$-\frac{\lambda_0}{l} \delta'(\xi-R) \left(\frac{R}{\xi}\right)^n \int_{\xi=R}^{\tau} \frac{\partial t(\xi, \eta)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=R} \varphi^*(\tau, \eta) d\eta; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + m \frac{u}{\xi} \right) = n_1 \frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\ddot{u}}{c_1^2} + \frac{\mathcal{E}_0}{f_1 l} \delta'(\xi-R) \left(\psi^* t - f^* \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{m}{R} \lambda^* u \right) \Big|_{\xi=R} + \\ + \left[\Omega_0 (1-K_p) \ddot{u} - 2\mathcal{E}_0 \frac{m}{R} \mu^* \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{u}{\xi} \right) \right] \Big|_{\xi=R} \frac{\delta(\xi-R)}{f_1 l}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $c_1^2 = f_1 / \rho_1$, $n_1 = \psi_1 / f_1$.

Для тел, покрытых тонким инородным слоем, уравнения обобщенной термоупругости получим, осуществляя в (7), (8) предельный переход при $R \rightarrow R_1$.

Если слой содержит пластинчатое включение, срединная плоскость которого совпадает с плоскостью $x=0$, цилиндр содержит стержневое включение кругового сечения, ось которого совпадает с осью $r=0$; шар — малое центральное сферическое включение, то уравнения обобщенной термоупругости получим для этих случаев также из (7), (8) при $R \rightarrow 0$. При этом для слоя $\beta=2h$, $l=1$, для цилиндра $\beta=\pi h^2$, $l=2\pi r$, для шара $\beta=4\pi h^3$, $l=4\pi r^2$. Например, для пространства, содержащего инородное пластинчатое включение, срединная плоскость которого совпадает с плоскостью $x=0$ и в области которого действуют с начального момента времени равномерно распределенные источники тепла мощностью q_0 , имеем следующие уравнения обобщенной термоупругости:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} \frac{\partial^2 t(x, \eta)}{\partial x^2} \varphi_1(\tau, \eta) d\eta = c_v^{(1)} t - Q_0 \delta(x) S_+(\tau) + \Omega_0 (c_l^{(0)} - K_p c_l^{(1)}) t|_{x=0} \delta(x) - \\ - \lambda_0 \delta'(x) \int_0^{\tau} \frac{\partial t(x, \eta)}{\partial x} \Big|_{x=0} \varphi^*(\tau, \eta) d\eta, \quad Q_0 = 2q_0 h; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = n_1 \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\ddot{u}}{c_1^2} + \frac{\mathcal{E}_0}{f_1} \left(\psi^* t|_{x=0} - f^* \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) \delta'(x) + \frac{\Omega_0}{f_1} (1-K_p) \ddot{u}|_{x=0} \delta(x). \quad (10)$$

Полагая, что в начальный момент времени температура t , скорость нагрева $\dot{t}$, перемещение u и скорость $\dot{u}$ равны нулю, и применяя к (9), (10) преобразование Лапласа по τ , находим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{t}}{dx^2} - \gamma^2 \bar{t} = - \left[\frac{Q_0}{s^2} - \Omega_0 (c_l^{(0)} - K_p c_l^{(1)}) \bar{t}|_{x=0} \right] \frac{\gamma^2}{c_v^{(1)}} \delta(x) - \\ - \lambda_0 \frac{d \bar{t}}{dx} \Big|_{x=0} \left(\frac{\tau_q^{(1)} s + 1}{\tau_q^{(0)} s + 1} - K_\lambda \right) \frac{\delta'(x)}{\lambda_l^{(1)}}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \frac{s}{c_1^2} \bar{u} = n_1 \frac{d \bar{t}}{dx} + \frac{\mathcal{E}_0}{f_1} \left(\psi^* \bar{t}|_{x=0} - f^* \frac{d \bar{u}}{dx} \Big|_{x=0} \right) \delta'(x) + \\ + \frac{\Omega_0}{f_1} (1-K_p) s^2 \bar{u}|_{x=0} \delta(x), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\gamma = \sqrt{\frac{s}{a} (s \tau_q^{(1)} + 1)}, \quad a_1 = \frac{\lambda_l}{c_v^{(1)}}.$$

Решения уравнений (11), (12) имеют вид

$$\bar{t} = k \frac{\gamma e^{-\gamma x}}{(\gamma + b) s^2}, \quad \bar{u} = \frac{k}{f_1} \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left[\psi^* + n_1 f^* \left(\frac{s}{c_1 \gamma + s} - 1 \right) \right] \times \quad (13)$$

$$\times \left[1 + \frac{\mathcal{E}_0 f^3}{2j_1} \left(\frac{1}{h} - \frac{s}{c_1} \right) \right]^{-1} e^{-|x|s/c_1 + \frac{\psi_1 \gamma}{\gamma^2 - s^2/c_1^2} (e^{-|x|s/c_1} - e^{-\gamma|x|})} \left\{ \frac{\gamma \operatorname{sign} x}{(\gamma + b)s^2} \right\}.$$

Переходя в (13) от изображений к оригиналам, находим

$$\begin{aligned} t &= k \frac{\partial U(|x|, \tau, 0)}{\partial |x|}, \quad u = k \left\langle n_1 \left[U(|x|, \tau, 0) + \frac{U(|x|, \tau, \kappa)}{M^2 - 1} \right] + \right. \\ &+ c_1 \left\{ \frac{n_1 - n^*}{d} \left[\frac{1}{d} (e^{\tau^* d} - 1) - \tau^* \right] + \frac{n_1}{M^2 - 1} \left[\frac{e^{\tau^* d} - 1}{d^2 (d + n)} + \frac{1 - e^{-n \tau^*}}{n^2 (d + n)} - \frac{\tau^*}{nd} \right] + \right. \\ &\quad \left. \left. + b \left[\left(n_1 c_1 \frac{c_1 b + d}{M^2 - 1} - c_q^{(1)2} b n^* \right) \sum_{i=1}^4 \frac{e^{s_i \tau^*} - 1}{s_i \Psi'(s_i)} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - c_q^{(1)2} \frac{b + d/c_1}{M^2 - 1} n n_1 \sum_{i=1}^5 \frac{e^{s_i \tau^*} - 1}{s_i \Psi'(s_i)} \right] \right\} S_{-}(\tau^*) + c_q^{(1)} \int_0^1 e^{-\tau^* \eta} d\eta - I_0 \left(\frac{\tau - \eta}{2\tau_q^{(1)}} \right) \times \\ &\quad \times \left\{ \left(-n_1 \frac{c_1 b + d}{1 - M^{-2}} + b n^* c_1 \right) \left[\sum_{i=1}^3 \frac{e^{s_i \eta^*}}{F'(s_i)} + \frac{1}{\tau_q^{(1)}} \sum_{i=1}^5 \frac{e^{s_i \eta^*}}{\Phi'(s_i)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + n \frac{c_1 b + d}{M^2 - 1} n_1 \left[\frac{1}{\tau_q^{(1)}} \sum_{i=1}^4 \frac{e^{s_i \eta^*}}{\Psi'(s_i)} + \sum_{i=1}^4 \frac{e^{s_i \eta^*}}{\chi'(s_i)} \right] \right\} S_{-}(\tau^*) \delta(\eta) \rangle \operatorname{sign} x, \\ c_q^{(1)} &= \sqrt{\frac{a_1}{\tau_q^{(1)}}}, \quad k = \frac{Q_0 b}{2c_q^{(1)}}, \quad b = \frac{2c_q^{(1)}}{\Omega_0(c_q^{(0)} - K_\rho c_q^{(1)})}, \quad n^* = \frac{\tau^*}{f^*}, \quad M = \frac{c_1}{c_q^{(1)}}, \\ \kappa &= \frac{1}{a_1} \left(\frac{1}{c_q^{(1)2}} - \frac{1}{c_1^2} \right)^{-1}, \quad \tau^* = \tau - \frac{|x|}{c_1}, \quad \eta^* = \eta - \frac{|x|}{c_1}, \quad U(|x|, \tau, \kappa) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial |x|} + b \right) Z(|x|, \tau, \kappa), \quad Z(|x|, \tau, \kappa) = \frac{c_q^{(1)2}}{\kappa} \left[\frac{X(|x|, \tau, 0)}{s_1 s_2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\kappa X(|x|, \tau, s_1)}{s_1 (s_1 + \kappa) (s_1 - s_2)} - \frac{\kappa X(|x|, \tau, s_2)}{s_2 (s_2 + \kappa) (s_1 - s_2)} - \frac{X(|x|, \tau, -\kappa)}{(s_1 + \kappa) (s_2 - \kappa)} \right], \\ X(|x|, \tau, \xi) &= \left\{ \exp \frac{-|x|}{2\tau_q^{(1)} c_q^{(1)}} + \frac{|x|}{2\tau_q^{(1)} c_q^{(1)}} \int_{\frac{|x|}{c_q^{(1)}}}^{\tau} \exp \left[- \left(\xi + \frac{1}{2\tau_q^{(1)}} \left(\tau - \frac{|x|}{c_q^{(1)}} \right) \right) \right] d\tau \right\} \\ &\quad \times \frac{I_1 \left(\frac{1}{2\tau_q^{(1)}} \sqrt{\eta^2 - x^2/c_q^{(1)2}} \right)}{\sqrt{\eta^2 - x^2/c_q^{(1)2}}} d\eta \Big| S_{-} \left(\tau - \frac{|x|}{c_1} \right). \end{aligned}$$

$$s_{1,2} = \frac{1}{2\tau_q^{(1)}}(-1 \pm \sqrt{1 + 4b^2 a_1 \tau_q^{(1)}}), \quad n = \frac{1}{\tau_q^{(1)}(1 - M^{-2})}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{1}{\tilde{c}} - 2 \frac{f_1 c_1}{\mathcal{E}_{of}^*},$$

$$\Phi(s) = s(s-d)(s-s_1)(s-s_2), \quad \Psi(s) = \Phi(s)(s+n), \quad \chi(s) = \frac{\Psi(s)}{s}, \quad F(s) = \frac{\Phi(s)}{s}$$

$I_v(\eta)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Львовский филиал математической физики
Института математики
Академии наук УССР

Поступило
7 V 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. В. Лыков, Теория теплопроводности, М., «Высшая школа», 1967. ² А. Д. Коваленко, Основы термоупругости, Киев, «Наукова думка», 1970.