

УДК 517.941.9

МАТЕМАТИКА

В. А. ИЛЬИН

**О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ
РЯД ФУРЬЕ И ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ
ПУЧКА М. В. КЕЛДЫША ОБЫКНОВЕННЫХ
НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ**

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 23 VI 1975)

1°. В этой работе при весьма общих и довольно естественных предположениях на собственные значения введенного в работе М. В. Келдыша ⁽¹⁾ пучка обыкновенных дифференциальных операторов независимо от вида краевых условий для любой из класса L_2 мы устанавливаем необходимое и достаточное условие равномерной равносходимости разложений этой функции в тригонометрический ряд Фурье и в биортогональный ряд по какой-либо полной минимальной подсистеме собственных и присоединенных функций указанного пучка.

До сих пор для пучка дифференциальных операторов проводилось лишь изучение вопросов кратной полноты собственных и присоединенных функций и вопроса о сходимости обобщенных спектральных разложений для функций, принадлежащих области определения рассматриваемого дифференциального оператора, т. е. обладающих большим запасом гладкости (см. работу М. В. Келдыша ⁽¹⁾). Никаких теорем равносходимости с тригонометрическим рядом для разложений по собственным и присоединенным функциям пучка до сих пор установлено не было.

Примененная нами методика позволила нам при установлении теорем равносходимости полностью отказаться от конкретного вида рассматриваемых краевых условий, отпавляясь лишь от общих предположений об асимптотическом поведении собственных значений и от предположения о том, что порядок пучка не превосходит половины порядка дифференциального оператора.

2°. Следуя М. В. Келдышу ⁽¹⁾, рассмотрим пучок порядка m дифференциальных операторов порядка n

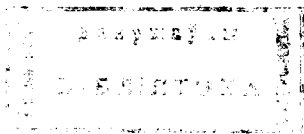
$$L(\lambda)u = u^{(n)} + p_1(x, \lambda)u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x, \lambda)u' + [p_n(x, \lambda) + \lambda^m]u, \quad (1)$$

предполагая, как у М. В. Келдыша, что $p_k(x, \lambda)$ — полином по λ степени меньше, чем km/n .

Обозначим символом λ_k собственные значения оператора (1) на произвольном интервале G с совершенно произвольными краевыми условиями, а символом u_k — отвечающие им собственные и присоединенные функции* (при нумерации собственных значений мы допускаем их совпадение).

* Напомним, что собственная функция u , отвечающая собственному значению λ , является нетривиальным решением уравнения $L(\lambda)u = 0$, а l -я присоединенная функция u_l , отвечающая тому же λ , является нетривиальным решением уравнения

$$L(\lambda)u_l + \frac{1}{1!} \frac{\partial L(\lambda)}{\partial \lambda} u_{l-1} + \dots + \frac{1}{l!} \frac{\partial^l L(\lambda)}{\partial \lambda^l} u = 0, \quad l = 1, 2, \dots$$



Вместо собственных значений λ_k удобнее рассматривать числа

$$\mu_k = \begin{cases} [(-1)^{n/2} \cdot (-\lambda_k^m)]^{1/n}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ [(-i) \cdot \lambda_k^m]^{1/n}, & \text{если } n \text{ нечетно, } \operatorname{Im} \lambda_k^m \geq 0, \\ [i \cdot \lambda_k^m]^{1/n}, & \text{если } n \text{ нечетно, } \operatorname{Im} \lambda_k^m < 0 \end{cases} \quad (2)$$

(здесь всюду $(re^{i\varphi})^{1/n} = r^{1/n} e^{i\varphi/n}$, причем $-\pi/2 < \varphi \leq 3\pi/2$). Как показывает теорема М. В. Келдыша, система всех собственных и присоединенных функций пучка (1) при выполнении определенных условий является m -кратно полной. Поэтому мы выделим какую-либо подсистему $\{u_k\}$ собственных и присоединенных функций пучка (1), являющуюся однократно полной в $L_2(G)$ и, кроме того, минимальной. Для такой подсистемы $\{u_k\}$ существует и притом единственная биортогонально сопряженная к ней в $L_2(G)$ система $\{v_k\}$. Поэтому для любой функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ и любого вещественного $\mu > 0$ (при условии, что числа μ_k не имеют конечных точек сгущения) мы можем составить частичную сумму биортогонального ряда

$$\sigma_\mu(x, f) = \sum_{|\mu_k| < \mu} (f, v_k) \cdot u_k(x). \quad (3)$$

Для той же функции $f(x)$ составим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье, а точнее, составим модифицированную сумму

$$S_\mu(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{|x-y| \leq R} \frac{\sin \mu(x-y)}{(x-y)} f(y) dy,$$

где x пробегает какой-либо компакт K интервала G , а R — достаточно малое положительное число. Известно, что на этом компакте K сумма $S_\mu(x, f)$ отличается от частичной суммы тригонометрического ряда Фурье на величину, равномерно на компакте K стремящуюся к нулю.

Определение 1. Будем говорить, что для данной функции $f(x)$ биортогональный ряд по подсистеме $\{u_k\}$ равномерно равносходится с тригонометрическим рядом на компакте K интервала G , если разность $\sigma_\mu(x, f) - S_\mu(x, f)$ стремится к нулю при $\mu \rightarrow \infty$ равномерно на этом компакте.

Определение 2. Будем говорить, что подсистема собственных и присоединенных функций $\{u_k\}$ представляет собой след базиса в $L_2(G)$ в слабом смысле, если для любого компакта K интервала G и для любой функции $f(x)$ из класса $L_2(K)$ * частичная сумма (3), составленная по функциям подсистемы $\{u_k\}$, слабо сходится в $L_2(K)$ к $f(x)$.

Основная теорема. Пусть выполнены следующие три требования:

1) порядок пучка m и порядок дифференциального оператора n связаны неравенством $m \leq n/2$ **;

2) коэффициенты $p_k(x, \lambda)$ пучка (1) являются полиномами по λ степени меньше, чем kt/n , и как функции x принадлежат классам $C^{n-k+1}(G)$;

3) числа μ_k , определяемые соотношениями (2), лежат в полосе $|\operatorname{Im} \mu_k| \leq B = \text{const}$ и, кроме того, для любого вещественного $\mu > 0$ удовлетворяют неравенству

$$\sum_{|\mu_k - \mu| \leq 1} 1 \leq C = \text{const}.$$

Тогда для того чтобы для любой функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ биортогональный ряд по какой-либо полной в $L_2(G)$ и минимальной подси-

* $L_2(K)$ — это класс $L_2(K)$, все элементы которого продолжены нулем за пределы компакта K .

** Это неравенство можно заменить неравенством $m < n$, если общее число присоединенных функций конечно.

стеме $\{u_k\}$ собственных и присоединенных функций пучка (1) равномерно равносходился с тригонометрическим рядом на любом компакте K интервала G необходимо и достаточно, чтобы подсистема $\{u_k\}$ представляла собой след базиса в $L_2(G)$ в слабом смысле.

Основная теорема позволяет перенести на случай биортогонального ряда по подсистеме $\{u_k\}$ все результаты, справедливые для тригонометрических рядов Фурье функций из класса L_2 (и, в частности, известную теорему Карлесона — Лузина).

Отметим, что основная теорема является новой и для случая линейного пучка $m=1$, когда все коэффициенты p_k не зависят от λ , ибо хотя в нашей работе (2) и была для этого случая доказана теорема равносходимости с тригонометрическим рядом даже для функции из класса L_1 , мы требовали в этой работе, чтобы функция имела в G компактный носитель и чтобы биортогонально сопряженная система $\{v_k\}$ состояла из функций, являющихся (хотя бы локально) регулярными решениями уравнений для собственных и присоединенных функций сопряженного оператора.

3°. Метод доказательства основной теоремы отличен от методов, применявшихся всеми другими авторами, и является модификацией метода, разработанного нами в работе (2) и базирующегося лишь на специальном виде формулы среднего значения для регулярного решения уравнения, которому удовлетворяют собственные и присоединенные функции. Как и в работе (2), существенную роль играет формула среднего значения, установленная в (3) Е. И. Моисеевым, которая при сделанных нами предположениях оказывается справедливой в том же виде, что и в (3), для собственных и присоединенных функций пучка (1).

Важным вспомогательным результатом является полученная нами оценка спектральной функции оператора (1)

$$\theta(x, y, \mu) = \sum_{|\mu_k| < \mu} u_k(x) \cdot \overline{v_k(y)}.$$

Мы доказали, что равномерно относительно x на любом компакте K интервала G

$$\int_G \left[\theta(x, y, \mu) - \frac{1}{\pi} \frac{\sin \mu(x-y)}{(x-y)} \right]^2 dy = O(1).$$

Автор благодарит за внимание к этой работе и за обсуждение ее результатов А. Н. Тихонова, участников семинаров А. В. Бицадзе и С. М. Никольского, а также Ш. А. Алимова и Е. И. Моисеева.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
23 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. В. Келдыш, ДАН, т. 77, № 1 (1951). ² В. А. Ильин, ДАН, т. 223, № 3 (1975).
³ Е. И. Моисеев, ДАН, т. 223, № 3 (1975).