

С. Л. КРУШКАЛЬ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ КЛЕЙНОВЫХ ГРУПП

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 30 VI 1975)

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, рассмотрим единичный шар $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| < 1\}$ и группу $\mathcal{M}(B^n)$ всех мебиусовых (конформных) автоморфизмов $x \rightarrow Ax$ шара B^n . Пусть G — дискретная подгруппа $\mathcal{M}(B^n)$, т. е. клейнова группа; она действует разрывно в B^n и, возможно, еще на некотором множестве $\Omega \subset \partial B^n = S^{n-1}$, открытым в S^{n-1} . Множество $\Lambda = \Lambda(G)$ точек накопления орбит $Gx = \{Ax\}$, $x \in B^n$, называемое предельным множеством группы G , замкнуто и либо совпадает с S^{n-1} , либо нигде не плотно в S^{n-1} . Будем считать, что $\Lambda(G)$ бесконечно.

Обозначим через μ_{n-1} сферическую $(n-1)$ -мерную (лебегову) меру на S^{n-1} , через $A'(x)$ — матрицу Якоби для Ax и через $|A'(x)| = |dAx|/|dx|$ — линейное растяжение в точке x при отображении A ; тогда $|\det A'(x)| = |A'(x)|^n$. Если $\Omega \neq \emptyset$, то при $n > 2$ проще сразу рассматривать мебиусовы автоморфизмы $\mathbb{R}^{n-1}$ (не продолжая их в $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: x_n > 0\}$, причем можно считать, что $x = \infty$ является обыкновенной точкой группы G , т. е. $\Lambda(G) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ограничено, а вместо μ_{n-1} — брать тогда $(n-1)$ -мерную меру Лебега m_{n-1} в $\mathbb{R}^{n-1}$).

В силу разрывности G на $B^n \cup \Omega$ в этом множестве можно всегда выделить фундаментальное множество группы G , содержащее по одной точке из каждой орбиты Gx , $x \in B^n \cup \Omega$; нам потребуется в качестве такого множества так называемый изометрический фундаментальный полиэдр

$$P_G = \{x \in B^n \cup \Omega: \sup_{A \in G \setminus \{1\}} |A'(x)| < 1\},$$

ограниченный частями изометрических сфер

$$I_A = \{x: |A'(x)| = 1\}$$

(окружностей при $n=2$), ортогональных S^{n-1} (ср. ^{(1), (2)}); при этом к P_G добавляются еще некоторые из граней. (Мы будем для простоты считать, что G не содержит вращений S^{n-1} .) Этот полиэдр P_G является выпуклым в гиперболической метрике в B^n . Пересечение $P_G \cap \Omega$ (вообще говоря, не связное) ограничено кусками $(n-2)$ -мерных изометрических сфер $I_A \cap S^{n-1}$, причем изометричность здесь понимается в сферической метрике

$$ds^2 = 4|dx'|^2 / (1 + |x'|^2)^2, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1},$$

на S^{n-1} .

Оказывается, можно провести в некотором смысле аналогичную процедуру с выделением «фундаментального множества» и в Λ . Именно, удалим из Λ принадлежащие ему неподвижные точки элементов G . Образованное этими точками множество F всюду плотно в Λ и является счетным при $n \leq 3$, а при $n > 3$ его размерность не превосходит $n-3$ *. Оставшееся множество $\Lambda_0 = \Lambda \setminus F$ уже не содержит точек x , для которых $A_1 x = A_2 x$ при различных $A_1, A_2 \in G$, т. е. орбиты любых двух не эквивалентных относительно G точек из Λ_0 не пересекаются. Пользуясь аксио-

* По поводу классификации конформных автоморфизмов $\mathbb{R}^n$ и свойств их неподвижных точек при $n \geq 3$ см. ⁽³⁾.

мой Цермело, можно образовать множество e_Λ , состоящее по одной точке из каждой орбиты Gx , $x \in \Lambda_0$. Однако здесь имеет место следующий интересный факт.

Теорема. Если $\mu_{n-1}\Lambda > 0$, то каждое из множеств e_Λ не измеримо (относительно меры μ_{n-1}).

Доказательство. Нам будет удобнее перейти к группе, действующей в R_+^n , рассматривая $R^{n-1} = \partial R_+^n$ как сферическое пространство, т. е. отождествляя его с S^{n-1} ; для этой группы сохраним все прежние обозначения $(G, A, \dots)$. Допустив противное: e_Λ измеримо, в силу условия, что образы $A(e_\Lambda)$ при различных $A \in G$ не пересекаются, будем иметь

$$\mu_{n-1}\Lambda = \int_{e_\Lambda} \sum_{A \in G} [A'(x)]^{n-1} d\mu_{n-1}(x), \quad (1)$$

где

$$[A'(x)] = \frac{ds(Ax)}{ds(x)} = \frac{|A'(x)|(1+|x|^2)}{1+|Ax|^2}.$$

Из (1) вытекает, что почти всюду на Λ_0 должен сходиться ряд

$$\sum_{A \in G} [A'(x)]^{n-1}. \quad (2)$$

Удаляя еще, если нужно, из Λ_0 точки не более чем счетного множества сфер размерности $n-2$, для которых

$$[A_1'(x)] = [A_2'(x)]$$

при различных $A_1, A_2 \in G$, $x \in S^{n-1}$, получим, что в каждой из оставшихся точек $x_0 \in e_\Lambda$, где сходится ряд (2), имеется свой наибольший член $[A_0'(x)]^{n-1}$, т. е. такой, что

$$[A'(x_0)] < [A_0'(x_0)] \text{ для всех } A \neq A_0.$$

Тогда для каждого $A \in G \setminus \{1\}$ имеем

$$[A'(A_0x_0)] = [(A \circ A_0)'(x_0)] / [A_0'(x_0)] < 1,$$

а поскольку ряд (2) сходится и в точке A_0x_0 , то

$$\sup_{A \in G \setminus \{1\}} [A'(A_0x_0)] < 1.$$

Это означает, что точка A_0x_0 должна принадлежать множеству $P_G \cap \Omega$ (причем множество Ω непусто), что невозможно.

Аналогично устанавливается, что и всякое подмножество $e' \subset e_\Lambda$ положительной внешней меры не может быть измеримым.

Эта теорема дает отрицательное решение одной проблемы Л. Альфорса, поставленной им на румынско-финском семинаре по пространствам Тейхмюллера и квазиконформным отображениям в 1969 г. (см. (4), стр. 305).

В связи с доказанным возникает задача: могут ли существовать при $\mu_{n-1}\Lambda(G) > 0$ нетривиальные измеримые на Λ формы

$$\varphi = \sum \varphi_{j_1, \dots, j_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1^{j_1} \dots dx_n^{j_n}$$

с носителями $\text{supp } \varphi \subset \Lambda$, инвариантные относительно G ($j_1, \dots, j_n \in \mathbb{Z}$)? Частным случаем этой задачи является следующий нерешенный вопрос из теории клейновых групп на плоскости; существуют ли при $m_2\Lambda(G) > 0$ (измеримые) дифференциалы Бельтрами $\psi(z) dz/d\bar{z} \neq 0$ относительно клей-

новой группы G конформных автоморфизмов расширенной комплексной плоскости $\bar{C}$ с носителями $\text{supp } \psi \subset \Lambda(G)$ или же всякая квазиконформная деформация f группы G , т. е. квазиконформный автоморфизм $\bar{C}$, для которого fGf^{-1} — снова клейнова группа, должна быть конформной на $\Lambda(G)$?

Представляется вероятным, что таких дифференциалов нет.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
25 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. Р. Форд, Автоморфные функции, ОНТИ, М.—Л., 1936. ² L. V. Ahlfors, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., v. 55, № 2, 251 (1966). ³ Б. Н. Ананасов, Сибирск. матем. журн., т. 16, № 5 (1975). ⁴ Proc. of the Romanian — Finnish Seminar on Teichmüller Spaces and Quasiconformal Mappings (Braşov, Romania, 1969), 1971.