

В. Ю. ЛЯПИДЕВСКИЙ

О КЛАССАХ КОРРЕКТНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 22 V 1975)

Рассмотрим систему двух уравнений вида

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1)$$

где $F(U) \in C^2(\Omega)$, Ω — область в E_2 , $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

При изучении задачи Коши в целом, т. е. при всех $t > 0$, для гиперболических систем вида (1) одной из существенных трудностей, обусловленной нелинейностью уравнений, является возможность неограниченного возрастания производных решения («градиентная катастрофа»). Более того, из гладких начальных данных за конечное время может образоваться бесконечное число особенностей. Это свойство решений препятствует получению теорем единственности решений системы (1) в тех же классах разрывных функций, в которых получены теоремы существования обобщенных решений задачи Коши в целом. Только для некоторых гиперболических систем вида (1) в настоящее время удается так подобрать класс функций, что обобщенные решения задачи Коши из этого класса существуют и непрерывно зависят от начальных данных. Такие классы будем называть классами корректности системы (1).

В работе строится класс корректности Λ для нелинейных гиперболических систем с перечисляемыми ниже свойствами A_1 – A_6 . Для систем, обладающих этими свойствами, в (1) построено в целом обобщенное решение задачи Коши в классе ограниченных измеримых функций. Однако класс Λ содержит только ограниченные функции с конечным числом кусочно-гладких линий разрыва. Поэтому теорема существования решений задачи Коши из класса Λ доказана отличным от (1) способом. Непрерывная зависимость от начальных данных решений системы (1) из класса Λ установлена методом, изложенным в (4), для решений, мало отличающихся от постоянного.

Под решением системы (1) понимаем измеримую функцию $U(t, x)$, удовлетворяющую при $t > 0$ системе (1) в смысле теории распределений. На протяжении всей работы будем считать, что решения системы (1) выбираются из класса функций $U(t, x)$, определенных при $t \geq 0$, ограниченных и непрерывных вместе с первыми производными вне конечного числа кусочно-гладких линий разрыва и таких, что во всех точках существуют пределы $U^\pm(t, x) = U(t, x \pm 0)$.

Пусть $s = dx/dt$ — наклон линии разрыва. Во всех точках разрыва решения $U(t, x)$, за исключением конечного их числа, выполнены условие Гюгонио

$$s(U^+ - U^-) = F(U^+) - F(U^-). \quad (2)$$

Сформулируем требования к системе (1). Систему (1) считаем строго гиперболической, т. е. матрица $(\partial F / \partial U)$ имеет вещественные собственные значения $\lambda_1(U) < \lambda_2(U)$ для $U \in \Omega$. Система (1) сильно нелинейна, т. е.

правые собственные векторы $r_i(U)$ матрицы $(\partial F / \partial U)$, соответствующие собственным значениям $\lambda_i(U)$, удовлетворяют неравенствам $r_i \cdot \nabla \lambda_i > 0$ для $i=1, 2$.

A_1 . Существует невырожденное в области Ω преобразование $(u_1, u_2) \rightarrow (w, z)$ к инвариантам Римана, т. е. функциям, удовлетворяющим следующим соотношениям:

$$r_2 \cdot \nabla z = r_1 \cdot \nabla w = 0, \quad r_1 \cdot \nabla z > 0, \quad r_2 \cdot \nabla w > 0.$$

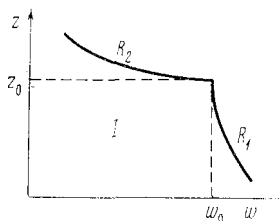


Рис. 1

Формулируемые ниже условия A_2 — A_5 описывают глобальное поведение ударных кривых в плоскости (w, z) , т. е. кривых, на которых лежат все состояния, связанные с данным состоянием (w^0, z^0) условиями Гюгонно (2).

A_2 . Если считать (w^0, z^0) левым состоянием и выделить только устойчивые разрыва (2) , то ударные кривые задаются уравнениями $z = R_1(w; z^0, w^0)$ при $w \geq w^0$, $z = R_2(w; z^0, w^0)$ при $w \leq w^0$. Аналогично, если (w^0, z^0) — правое состояние, то ударные кривые описываются уравнениями $z = L_1(w; z^0, w^0)$ при $w \leq w^0$ и $z = L_2(w; z^0, w^0)$ при $w \geq w^0$, причем

$$\lim_{|w| \rightarrow \infty} |w + R_i| = \lim_{|w| \rightarrow \infty} |w + L_i| = \infty, \quad i=1, 2,$$

$$-\infty \leq \partial L_1 / \partial w \leq -1; \quad -1 \leq \partial L_2 / \partial w \leq 0; \quad -\infty \leq \partial R_1 / \partial w \leq -1;$$

$$-1 \leq \partial R_2 / \partial w \leq 0 \quad (\text{рис. 1}).$$

A_3 . Любое состояние U , удовлетворяющее условию Гюгонно (2), лежит на одной из четырех ударных кривых с начальной точкой U^0 .

A_4 . Если $z^\pm = R_i(w^\pm; z^-, w^-)$, то $R_i(w; z^+, w^+) \leq L_i(w; z^+, w^+)$ при $w^\pm \leq w \leq w^\pm$, $i=1, 2$.

A_5 . Пусть $Q = \{(w, z) | w \geq w_0, z \leq z_0\}$, $(w_0', z_0') \in Q$. Тогда при $z = R_1(w; z_0, w_0)$, $z' = R_1(w'; z_0', w_0')$, $|z - z_0| = |z' - z_0'|$ имеем

$$|w' - w_0'| \leq |w - w_0|$$

и при $z = R_2(w; z_0, w_0)$, $z' = R_2(w'; z_0', w_0')$, $|w - w_0| = |w' - w_0'|$ имеем

$$|z' - z_0'| \leq |z - z_0|.$$

Приведенные условия гарантируют существование автомодельного решения задачи о распаде произвольного разрыва (4) . Кроме того, условие A_5 обеспечивает уменьшение амплитуды разрыва после взаимодействия с разрывом другого семейства.

Определим класс корректности Λ для системы (1). Предполагаем, что эта система удовлетворяет условиям A_1 — A_5 . Пусть Λ — множество функций $U(t, x)$ таких, что для любого $t \geq 0$ функция $U(t, x)$ непрерывно дифференцируема по x всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек, причем

$$\frac{\partial}{\partial x} z(U(t, x)) \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} w(U(t, x)) \geq 0,$$

а в точках разрыва пределы $z^\pm = z(U^\pm(t, x))$, $w^\pm = w(U^\pm(t, x))$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} z^+ &\leq R_1(w^+; z^-, w^-) & \text{при} & \quad w^+ \geq w^-, \\ z^+ &\leq R_2(w^+; z^-, w^-) & \text{при} & \quad w^+ \leq w^-, \end{aligned}$$

т. е. точка (w^+, z^+) лежит в области I (см. рис. 1) по отношению к точке (w^-, z^-) .

Теорема 1. Пусть функция $U^0(x)$, рассматриваемая как функция переменных (t, x) , принадлежит классу Λ .

Тогда существует решение $U(t, x)$ системы (1) из класса Λ такое, что $U(0, x) = U^0(x)$.

Доказательство. Пользуясь методами, изложенными в (2), можно построить решение задачи Коши в достаточно малой окрестности любой точки на начальной прямой. Остается только заметить, что полученное решение принадлежит классу Λ и что, как это показано в работе (3), в областях гладкости решений из класса Λ градиентная катастрофа не наступает. Таким образом, число разрывов в решении из класса Λ со временем не увеличивается и решение может быть построено в целом.

Построение решений задачи Коши для системы (1) в более широких классах функций основано на равномерной оценке решений из класса Λ , полученной в следующей лемме. Фиксируем постоянное решение $U^0 \in \Omega$.

Лемма. Пусть $U(t, x)$ — решение системы (1) из класса Λ и

$$\sup_x |U(0, x) - U^0| + \text{Var}_x U(0, x) \leq \delta.$$

Тогда существует величина K_δ такая, что для любого $t \geq 0$ справедлива оценка

$$\sup_x |U(t, x) - U^0| + \text{Var}_x U(t, x) \leq K_\delta. \quad (3)$$

Оценка (3) получается аналогично оценке (4.15) работы (4). Нужно только заметить, что не возрастает величина

$$G(t) = \sum_{x_k} [\delta(t, x_k)];$$

здесь суммирование ведется по всем точкам разрыва x_k функции

$$\sigma(t, x) = w(U(t, x)) + z(U(t, x)), \quad [\sigma(t, x)] = \sigma(t, x-0) - \sigma(t, x+0).$$

Перейдем к выяснению вопроса о непрерывной зависимости решений системы (1) от начальных данных. Непрерывная зависимость будет установлена в классе Λ_ρ функций из Λ , удовлетворяющих условию

$$\sup_{t \geq 0} (\sup_x |U(t, x) - U^0| + \text{Var}_x U(t, x)) \leq \rho$$

при достаточно малых значениях $\rho > 0$.

Пусть матрица $A(U, V)$ непрерывно дифференцируема по U, V и удовлетворяет соотношению

$$F(U) - F(V) = A(U, V)(U - V). \quad (4)$$

Так как $A(U, U) = (\partial F / \partial U)$, то для малых значений $\rho > 0$ матрица $A(U, V)$ имеет различные собственные значения $\xi_1(U, V) < \xi_2(U, V)$ при $U, V \in \Omega \cap B_\rho = \Omega_\rho$; здесь B_ρ — шар в E_2 с центром в U^0 и радиусом ρ .

А₆. Существует матрица $A(U, V)$, удовлетворяющая условию (4) и такая, что для любых U, V из Ω_ρ справедливо неравенство

$$(\lambda_i(U) - \xi_i(U, V))(\lambda_i(V) - \xi_i(U, V)) \leq 0, \quad i=1, 2. \quad (5)$$

Под потенциалом решения $U(t, x)$ системы (1) понимаем функцию $\Phi(t, x)$, удовлетворяющую условию Липшица по переменным (t, x) и в областях гладкости функции $U(t, x)$ соотношению $\partial \Phi / \partial x = U(t, x)$.

Теорема 2. Пусть система (1) удовлетворяет условию $\Lambda_1 - A_6$.

Тогда при достаточно малом значении $\rho > 0$ для любых двух решений $U^k(t, x)$ системы (1) из Λ_ρ справедлива следующая оценка разности потенциалов $\Phi^k(t, x)$ этих решений:

$$|\Phi^1(t, x) - \Phi^2(t, x)| \leq C \sup_x |\Phi^1(0, x) - \Phi^2(0, x)| \quad (6)$$

с постоянной C , зависящей от ρ .

Для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение условий теоремы 3.1 работы (4) для класса Λ_ρ при малых $\rho > 0$.

З а м е ч а н и е 1. Любую функцию $U^0(x)$ ограниченной вариации можно представить в виде предела функций $U_n^0(x)$ из Λ , вариация которых ограничена равномерно по n . По теореме 1 функциям $U_n^0(x)$ соответствуют решения $U_n^0(t, x)$ системы (1) из Λ . Компактность полученного семейства в L_1^{loc} следует из оценки (3). Предельная функция этой последовательности дает обобщенное решение задачи Коши с начальной функцией $U^0(x)$. По теореме 2 при малых ρ последовательность решений имеет только один предел в L_1^{loc} .

З а м е ч а н и е 2. Условия A_1 — A_6 выполнены для следующей системы, описывающей непрерывные движения политропного газа в лагранжевых координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial h \cdot v^{-1}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{1}{\gamma-1} v^{1-\gamma-1/2} h^2 v^{-2} \right)}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $h=vu$, $1<\gamma<3$, v — удельный объем, u — скорость частиц.

Выполнение условий A_1 — A_5 установлено для этой системы в (1). Проверим справедливость условия A_6 . В качестве матрицы $A(u, v; u_0, v_0)$, удовлетворяющей (4), выберем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \bar{u}/\bar{v} & -1/\bar{v} \\ -\hat{v}^{-\gamma} + \bar{u}^2/\bar{v} & -\bar{u}/\bar{v} \end{pmatrix};$$

здесь

$$\begin{aligned} \bar{u} &= {}^{1/2}(u+u_0), & \hat{v}^{-\gamma} &= \begin{cases} -\frac{v^{1-\gamma}-v_0^{1-\gamma}}{(\gamma-1)(v-v_0)}, & v \neq v_0, \\ v^{-\gamma} & v = v_0. \end{cases} \\ \bar{v} &= {}^{1/2}(v+v_0), \end{aligned}$$

Собственные значения $\xi_{1,2}(u, v; u_0, v_0)$ соответственно равны $\pm(\hat{v}^{-\gamma} \cdot \bar{v})^{1/2}$, и нетрудно убедиться в том, что условие A_6 выполнено.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
29 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ R. J. DiPerna, Comm. Pure and Appl. Math., v. 26, № 1, 1 (1973). ² Б. Л. Розенблатский, Н. Н. Яненко, Системы квазилинейных уравнений, М., «Наука», 1968.
³ M. Yamaguti, T. Nishida, Funkcialaj Ekvacioj, v. 11, 51 (1968). ⁴ В. Ю. Ляпидевский, Сб.: Динамика сплошной среды, в. 18, 1974, стр. 17. ⁵ J. Glimm, Comm. Pure and Appl. Math., v. 18, 697 (1965).