

О. В. РУДЕНКО, А. С. ЧИРКИН

**О СТАТИСТИКЕ ШУМОВЫХ РАЗРЫВНЫХ ВОЛН
В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ**

(Представлено академиком Р. В. Хохловым 10 VI 1975)

Предметом настоящей работы является изложение результатов исследования статистических свойств случайных волн, распространяющихся в нелинейных средах со слабой дисперсией. В последнее время в теории случайных волн получен ряд практически важных результатов (^{1, 2}), однако большинство их связано с расчетом спектральных и энергетических характеристик случайного волнового процесса. Недавно авторами (³) изучена статистика образующихся в слабодиспергирующей нелинейной среде гармоник узкополосного возмущения, а А. Н. Малахов и А. И. Саичев (⁴) предложили метод анализа случайных простых волн, основанный на кинетических уравнениях для функций распределения. Результаты работ (^{3, 4}) пригодны только для области перед образованием разрыва. Если же имеют дело со случайными сигналами, обладающими сколь угодно большими выбросами, разрывы в волне образуются в непосредственной близости от входа нелинейной системы. И в этом случае для корректного описания процесса необходимо исходить из динамических уравнений более высокого порядка. В предлагаемой работе рассмотрено изменение статистики случайных процессов, описываемых уравнением Бюргерса. Конкретные выражения для изменения функции распределения приведены для гауссова процесса.

Примененный метод вывода функции распределения случайного процесса в нелинейной среде существенно базируется на свойстве эргодических стационарных процессов. Это свойство обычно используется при экспериментальном определении статистических характеристик процессов и состоит в том, что относительное время пребывания случайного процесса v в интервале $(v, v + \Delta v)$ сходится по вероятности к одномерной функции распределения (^{5, 6}).

Рассмотрим отрезок узкополосного случайного процесса v , изображенного на рис. 1. Возьмем на оси колебательной скорости v точку v_i и малую окрестность Δv_i вблизи нее; этой окрестности соответствует множество $\Delta \tau_k^{(v)}(A_k, \varphi_k)$ на оси τ безразмерного времени; $\tau = \omega(t - x/c_0)$ — сопровождающая координата волны, бегущей вдоль оси x со скоростью звука, ω — средняя частота исходного процесса. A_k и φ_k — некоторые параметры, от которых может зависеть Δv_i . Индекс k относится к номеру периода волны; индекс v принимает значения 1 и 2 в зависимости от того, находится ли значение v_i на переднем или заднем скате волны.

Для эргодических стационарных процессов, согласно сказанному выше, функция распределения

$$w(v_i) = \lim_{\Delta v_i \rightarrow 0} (2\pi N \Delta v_i)^{-1} \sum_{v; k=1}^N \Delta \tau_k^{(v)}(A_k, \varphi_k). \quad (1)$$

Покажем сначала, что определение (1) в известных случаях дает правильный результат. Для узкополосного процесса

$$\Delta \tau_k^{(1)} = \Delta \tau_k^{(2)} = \left(1 - \frac{v_i^2}{A_k^2}\right)^{-1/2} \frac{\Delta v_i}{A_k}; \quad (2)$$

$$w(v_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi N} \sum_{k=1}^N (A_k^2 - v_i^2)^{-1/2} = \frac{1}{\pi} \langle (A^2 - v_i^2)^{-1/2} \rangle. \quad (3)$$

Осреднение в (3) с рэлеевской функцией распределения амплитуды и функцией распределения фазы $w(\varphi) = 1/2\pi$ приводит к гауссовому распределению

$$w(v) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} \exp \{-v^2/2\sigma^2\}.$$

Запись функции $w(v_i)$ в форме (1) удобна в связи с тем, что искажение волны наиболее просто описывается на языке изменения $\Delta \tau_k^{(v)}(A_k, \varphi_k, x=0)$ с координатой x . Закон преобразования величин $\Delta \tau_k^{(v)}$ иллюстрируется рис. 2, построенным в соответствии с известными свойствами решения уравнения Бюргерса для чисел Рейнольдса $Re \rightarrow \infty$ (1).

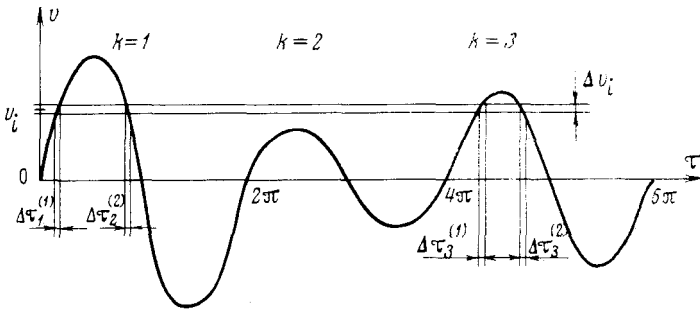


Рис. 1. Часть узкополосного случайного процесса

Наклон прямой $\tau = \alpha \omega v_i x$ на этом рисунке с ростом x увеличивается; при $\alpha \omega v_i x < \arcsin(v_i/A_k)$ текущая прямая расположена между прямой 1 и осью v . Эта область характеризуется отсутствием разрывов при $v=v_i$ в периоде с k -м номером как на переднем, так и на заднем склоне волны, и для нее

$$\tau_k^{(1)} = \arcsin(v_i/A_k) - \alpha \omega v_i x, \quad \tau_k^{(2)} = \pi - \arcsin(v_i/A_k) - \alpha \omega v_i x, \quad (4)$$

где вместо τ_k , вообще говоря, должно быть $\tau_k + \varphi_k$, но для рассматриваемого приближения φ является фактически случайной величиной, и изменением начала отсчета времени можно выбрать $\varphi_k = 0$.

Из формул (4) следует, что

$$G_1 = (|\Delta \tau_k^{(1)}| + |\Delta \tau_k^{(2)}|) / \Delta v_i = 2(A_k^2 - v_i^2)^{-1/2}. \quad (5)$$

Однако, как только текущая прямая займет положение 1, точка v_i переднего склона «наползет» на фронт, расположенный для любых x (из-за узкополосности сигнала) при $\tau=0$. Проекция $\Delta \tau_k^{(1)}$ при этом обратится в ноль, а $\Delta \tau_k^{(2)}$ будет по-прежнему расти, так что

$$G_2 = (\Delta \tau_k^{(1)} + |\Delta \tau_k^{(2)}|) / \Delta v_i = (A_k^2 - v_i^2)^{-1/2} + \alpha \omega x, \quad (6)$$

$$\arcsin(v_i/A_k) < \alpha \omega v_i x < \pi - \arcsin(v_i/A_k).$$

Дальнейшее увеличение x приведет к наползанию на разрыв точки $v=v_i$ заднего склона волны (положение 3 прямой), и сумма G_n обратится

в ноль для всех x таких, что

$$\alpha\omega v_i x > \pi - \arcsin(v_i/A_k).$$

Вычисление $w(v_i)$ на основе формул (1), (5), (6) следует производить по-разному при разных значениях x . Если текущая прямая расположена между осью v и прямой 2 ($0 < \alpha\omega v_i x < \pi/2$), то для всех A из области

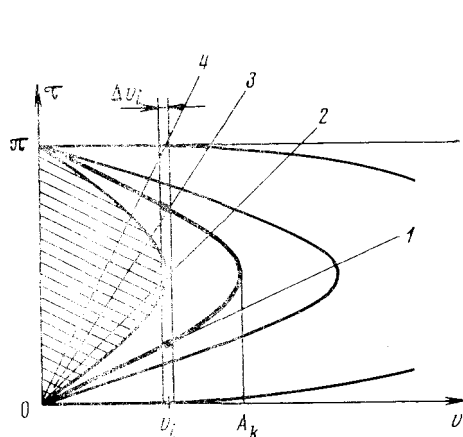


Рис. 2

Закон преобразования $\Delta\tau_k^{(v)}$

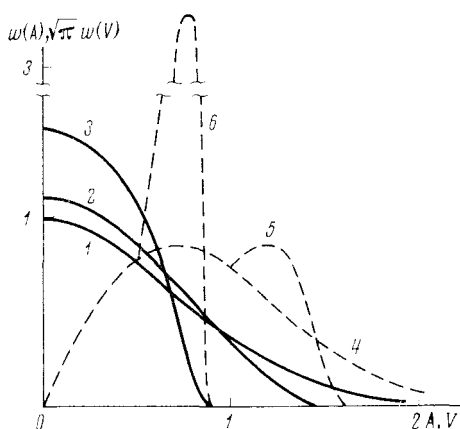


Рис. 3

Рис. 3. Нелинейная трансформация функции распределения нормального узкополосного случайного процесса (сплошные кривые) и его максимумов (штриховые кривые) на различных расстояниях z : 0 (1, 4), $\pi/2$ (2, 5), π (3, 6)

(v_i , $U_i = v_i / \sin(\alpha\omega v_i x)$) разрыв еще не образовался, а в области амплитуд (U_i , ∞) на разрыв наплыли только точки переднего склона. В этом случае функция (1) равна

$$w(v_i) = \frac{1}{\pi} \int_{v_i}^{v_i} G_1(A) w(A) dA + \frac{1}{2\pi} \int_{v_i}^{\infty} G_2(A) w(A) dA, \quad (7)$$

где $w(A)$ — функция распределения амплитуды исходного процесса ($0 \leq \alpha\omega v_i x \leq \pi/2$).

Когда текущая прямая занимает положение между прямыми 2 и 4 на рис. 2 ($\pi/2 \leq \alpha\omega v_i x \leq \pi$), для значений амплитуд $A < v_i$ сумма проекций $G_1 = 0$ и функция распределения

$$w(v_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{v_i}^{\infty} G_2(A) w(A) dA. \quad (8)$$

Наконец, если текущая прямая движется между положением 4 и осью τ , на разрыве оказываются точки v_i для всех $A_k \geq v_i$ и в этой области $w(v_i) = 0$.

Прежде всего отметим, что для гармонического начального сигнала до образования разрыва функция распределения его значений не меняется $w(v) = \pi^{-1} (A_0^2 - v^2)^{-1/2}$ ($|v| \leq A_0$ — амплитуды волны), хотя сама форма сигнала меняется сильно.

В случае исходного гауссова процесса в соответствии с (7) и (8) для функции распределения в нелинейной среде получаем

$$w(V) = \frac{e^{-V^2}}{2\sqrt{\pi}} \left\{ 1 + \Phi[V \operatorname{ctg}(zV)] + \frac{z}{\sqrt{\pi}} e^{-V^2 \operatorname{ctg}^2 zV} \right\}, \quad |V| < \frac{\pi}{z}, \quad (9)$$

где введены безразмерные переменные $V=v/\sigma\sqrt{2}$ и $z=\alpha\sigma\omega x\sqrt{2}$. Нелинейная трансформация функции (9) с ростом приведенного расстояния показана на рис. 3.

Обратимся теперь к функции распределения максимумов A_m рассматриваемого случайного процесса. Для гауссова процесса эти функции известны при произвольной ширине спектра (7). Общепринятый расчет интересующего распределения $w(A_m)$ основан на знании функции $w_z(v, \dot{v}, \ddot{v})$, где точка означает временную производную. В нашем же случае узкополосного исходного процесса можно воспользоваться рэлеевским распределением максимумов $A_0=A_m(x=0)$ и законом их изменения для регулярной волны (1)

$$A_m = \begin{cases} A_0 & \kappa A_0 \leq \pi/2, \\ A_0 f(\kappa A_0), & \kappa A_0 \geq \pi/2; \end{cases} \quad (10)$$

здесь $\kappa=\alpha\omega x$ и $f(\kappa A_0)$ определяются из уравнения $\kappa A_m = \arcsin(A_m/A_0)$. Из условия сохранения вероятности $w(A_0)dA_0=w(A_m)dA_m$ находим

$$w(A) = \begin{cases} 2A \exp(-A^2), & zA \leq \pi/2, \\ (2A/\sin^2 zA) (1 - zA \operatorname{ctg} zA) \exp(-A^2/\sin^2 zA), & \pi/2 \leq zA \leq \pi. \end{cases} \quad (11)$$

Функция (11) для разных значений z изображена на рис. 3, $A=A_m/\sigma\sqrt{2}$.

Таким образом, результаты работы показывают, что в слабодиспергирующих нелинейных средах вследствие образования разрывов и последующего их затухания происходит рост вероятности малых значений сигнала V и его огибающей A за счет уменьшения вероятности больших выбросов. Принципиальным является то обстоятельство, что уже при сколь угодно малых расстояниях x распределения $w(V)$ и $w(A)$ ограничены со стороны больших значений аргументов V и A и интенсивность сигнала $\bar{V}^2$ меньше, чем на входе среды.

В заключение отметим, что изложенный в работе подход можно применить для анализа изменения многомерных функций распределения сигнала v в нелинейной среде.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 V 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ О. В. Руденко, С. И. Солуян, Теоретические основы нелинейной акустики, М., «Наука», 1975, гл. X.
- ² С. А. Ахманов, Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, т. 17, 541 (1974).
- ³ О. В. Руденко, А. С. Чиркин, Акуст. журн., т. 20, 297 (1974).
- ⁴ А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, т. 17, 699 (1974).
- ⁵ В. С. Пугачев, Теория случайных функций, М., Физматгиз, 1962.
- ⁶ С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, М., «Наука», 1966.
- ⁷ В. И. Тихонов, Выбросы случайных процессов, М., «Наука», 1970.