

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

А. М. ФАЛЬ

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АДДИТИВНОГО ФУНКЦИОНАЛА ОТ ПРОСТЕЙШЕГО МАРКОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 2 VII 1975)

В работе ⁽¹⁾ Р. Л. Добрушин доказал две предельные теоремы для простейшего симметричного случайного блуждания на прямой. Используя метод доказательства этих теорем, а также результаты работы ⁽²⁾, можно обобщить указанные выше теоремы на случай, когда имеется простейшее марковское случайное блуждание.

Рассмотрим марковское случайное блуждание по целочисленным точкам неотрицательной полуоси с отражением в нуле вида

$$p_{r,r+1}=p_r=1/2 \left(1 - \frac{c}{r}\right), \quad r \geq 1, \quad |c| < 1; \quad p_0=1,$$

где p_r — вероятность скачка на единицу вправо, а $q_r=1-p_r$ — на единицу влево. Такое блуждание является возвратным при $-1/2 \leq c < 1$, и поэтому представляет интерес нахождение при определенных нормировках a_n и b_n предельного распределения последовательности

$$\eta_n = \left[\sum_{k=1}^n f(\xi_k) - a_n \right] / b_n, \quad n \geq 1,$$

где ξ_k — положение частицы в момент времени k , $f(i)$ — функция, заданная на неотрицательных целочисленных точках.

Введем обозначение

$$\rho_r = \prod_{k=1}^r \frac{q_k}{p_k} = \prod_{k=1}^r \frac{k+c}{k-c}, \quad r \geq 1, \quad \rho_0=1.$$

Предположим, что $|c| < 1/2$.

Теорема 1. Пусть ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{p_k \rho_k} = A_c \neq 0$$

абсолютно сходится.

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$P \left\{ \left[L_c \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \right] / (A_c n^{c+1/2}) < x \right\} = H(x),$$

где

$$L_c = \frac{\Gamma(1/2-c) \Gamma(1+1/2c) \Gamma(1/2+1/2c)}{\Gamma(1/2+c) \Gamma(1-1/2c) \Gamma(1/2-1/2c)},$$

$$H(x) = 1 - G_{c+1/2}(x^{-2/(1+2c)}), \quad x > 0,$$

а $G_\alpha(x)$ — функция распределения устойчивого закона с показателем α .

Теорема 2. Пусть $f(i)$ является финитной функцией и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{p_k \rho_k} = 0.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$P \left\{ \sqrt{\frac{L_c}{B_c}} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} f(\xi_k)}{n^{(2c+1)/4}} < x \right\} \rightarrow K(x),$$

где L_c — то же, что и в теореме 1,

$$B_c = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_0 + \dots + \rho_{i-1}}{p_i^2 \rho_i^2} f^2(i) + 4 \sum_{i < j} \frac{\rho_0 + \dots + \rho_{i-1}}{p_i \rho_i p_j \rho_j} f(i) f(j) - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^2(i)}{p_i \rho_i},$$

$$K(x) = P \{ \xi_1 \sqrt{\xi_2} < x \},$$

где ξ_1 — нормально распределенная случайная величина с параметрами $(0, 1)$, а ξ_2 — случайная величина, имеющая распределение $H(x)$.

Теоремы Р. Л. Добрушина получаются при $c=0$ из наших теорем для частного случая, когда $f(i)$ — четная функция.

Следствие. Пусть $f(i) = 1$ для $0 \leq i \leq l$ и $f(i) = 0$ для $i > l$. Тогда

$$P \left\{ L_c \mu_n / \left(1 + 2 \sum_{k=1}^l \frac{k}{k-c} \prod_{j=1}^k \frac{j-c}{j+c} \right) n^{c+1/2} < x \right\} \rightarrow H(x),$$

где μ_n — число попаданий в отрезок $[0, l]$ за n шагов.

Замечание 1. Мы рассмотрели случайное блуждание на неотрицательной полуоси с отражением в нуле. Однако несколько изменив доказательство, можно найти предельные распределения для возвратных марковских случайных блужданий с единичными скачками на всей оси.

Замечание 2. Мы предположим, что $|c| < 1/2$. Остальные области изменения c также можно рассмотреть, однако при этом получаются громоздкие выражения и мы их не приводим.

Автор признателен чл.-корр. АН УССР А. В. Скороходу за постановку задачи.

Институт кибернетики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
17 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Р. Л. Добрушин, УМН, т. 10, в. 3 (1955). ² А. М. Фаль, Укр. матем. журн., т. 23, № 6 (1971).