

УДК 534.26

ФИЗИКА

А. Г. ВИНОГРАДОВ, Р. З. МУРАТОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ НЕОДНОРОДНОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 22 IV 1975)

1. При рассмотрении электромагнитных полей в сплошных средах часто бывает удобно исходить не из самих уравнений Максвелла, а из эквивалентных им интегральных уравнений, содержащих функции Грина однородного пространства (см., например, ⁽¹⁾). Здесь мы покажем, что аналогичные интегральные уравнения могут быть получены и в акустике, и продемонстрируем эффективность такого подхода на примере низкочастотных дифракционных задач.

2. Пусть вне некоторого объема V идеальная жидкость однородна и характеризуется плотностью ρ и адиабатической сжимаемостью β . Внутри V эти величины имеют значения $\bar{\rho}(\mathbf{r})$, $\bar{\beta}(\mathbf{r})$, зависящие, вообще говоря, от координат. Тогда уравнения акустики

$$\nabla p + \bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} + \bar{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

можно в случае гармонических полей ($e^{i\omega t}$) переписать в виде

$$\nabla P + ik\mathbf{v} = ik\mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} + ikP = ikh, \quad (1)$$

где $k = \omega/c$ ($c = \sqrt{1/\bar{\rho}\bar{\beta}}$ — скорость звука в однородной жидкости), $P = p/\rho c$, а

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \left(1 - \frac{\bar{\rho}}{\rho}\right) \mathbf{v}, \quad h(\mathbf{r}) = \left(1 - \frac{\bar{\beta}}{\beta}\right) P, \quad (2)$$

так что снаружи V функции $\mathbf{g}$ и h равны нулю.

Уравнениям (1) соответствуют уравнения второго порядка

$$\Delta P + k^2 P = ik \nabla \cdot \mathbf{g} + k^2 h, \quad (3)$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + k^2 \mathbf{v} = ik \nabla h + k^2 \mathbf{g}. \quad (4)$$

Если источник первичной (рассеиваемой) звуковой волны находится на конечном расстоянии от объема V , то правые части (3) и (4) должны быть дополнены заданными функциями $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{q}(\mathbf{r})$, характеризующими свойства источника.

3. Для получения интегральных уравнений акустики построим формальные решения уравнений (3), (4), считая правые части заданными функциями. Эти решения получаются с помощью соответствующих функций Грина однородного пространства. Для уравнения (3) скалярная функция Грина есть, как известно *,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(R) = -\frac{1}{4\pi R} e^{-ikhR}, \quad (5)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Уравнению (4) соответствует тензорная функция Грина $\hat{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, которую легко найти методом, данным в ⁽²⁾. Эта функция, все компоненты

* Для простоты мы будем считать область, занятую жидкостью, неограниченной.

которой должны удовлетворять условию излучения, определяется как решение уравнения

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \hat{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 \hat{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{\varepsilon} \delta(\mathbf{R}), \quad (6)$$

где $\hat{\varepsilon}$ — единичный аффинор. Используя векторное тождество $\nabla \cdot (\nabla \cdot) = \nabla \times (\nabla \times) + \Delta ()$ и учитывая равенство

$$k^2 \nabla \times \hat{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla \times \hat{\varepsilon} \delta(\mathbf{R}),$$

являющееся следствием (6), получаем

$$(\Delta + k^2) \hat{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left[\hat{\varepsilon} - \frac{1}{k^2} \nabla \times (\nabla \times \hat{\varepsilon}) \right] \delta(\mathbf{R}). \quad (7)$$

Уравнение (7), очевидно, имеет решением

$$\hat{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left[\hat{\varepsilon} - \frac{1}{k^2} \nabla \times (\nabla \times \hat{\varepsilon}) \right] G(R). \quad (8)$$

4. Формальное решение уравнений (3), (4) теперь можно представить в виде

$$P(\mathbf{r}) = P_0(\mathbf{r}) + k^2 \int G(R) h(\mathbf{r}') dV' + ik \int G(R) \operatorname{div} \mathbf{g}(\mathbf{r}') dV', \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = & \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) + (k^2 - \operatorname{rot} \operatorname{rot}) \int G(R) \mathbf{g}(\mathbf{r}') dV' + \\ & + \frac{i}{k} (k^2 - \operatorname{rot} \operatorname{rot}) \int G(R) \operatorname{grad} h(\mathbf{r}') dV', \end{aligned} \quad (10)$$

где $\rho c P_0$ и $\mathbf{v}_0$ — давление и скорость в первичной звуковой волне*.

Члены, содержащие производные функций $\mathbf{g}$ и h , можно проинтегрировать по частям с последующей заменой $\partial/\partial \mathbf{r}' = -\partial/\partial \mathbf{r}$. Вынося затем $\partial/\partial \mathbf{r}$ за знак интеграла и заменяя $\mathbf{g}$ и h их явными выражениями, окончательно получим

$$P(\mathbf{r}) = P_0(\mathbf{r}) + k^2 \int_V Q_\beta G(R) P(\mathbf{r}') dV' + ik \operatorname{div} \int_V Q_\rho G(R) \mathbf{v}(\mathbf{r}') dV', \quad (11)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) + (k^2 - \operatorname{rot} \operatorname{rot}) \int_V Q_\rho G(R) \mathbf{v}(\mathbf{r}') dV' + ik \operatorname{grad} \int_V Q_\beta G(R) P(\mathbf{r}') dV' \quad (12)$$

где $Q_\rho = 1 - \frac{\tilde{\rho}}{\rho}$, $Q_\beta = 1 - \frac{\tilde{\beta}}{\beta}$. Для точек $\mathbf{r}$, принадлежащих объему V ,

(11) и (12) и являются интегральными уравнениями акустики**.

Для внешних точек формулы (11) и (12) представляют собой соотношения, связывающие поля $P_{\text{расс}} = P - P_0$ и $\mathbf{v}_{\text{расс}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ рассеянной звуковой волны с полями внутри объема V . Эта связь выражается с помощью двух

* В частности, для источников, находящихся от объема на конечном расстоянии, $P_0 = \int_V G f(\mathbf{r}') dV'$, $\mathbf{v}_0 = \int_V \hat{\Gamma} \mathbf{q}(\mathbf{r}') dV'$.

** Для потенциала ψ , вводимого по формуле $\frac{\tilde{\rho}}{\rho} \mathbf{v} = \nabla \psi$, вместо (11) и (12)

получается одно, но интегродифференциальное уравнение

$$\psi = \psi_0 + k^2 \int_V Q_\beta G \psi(\mathbf{r}') dV' + \operatorname{div} \int_V \left(1 - \frac{\tilde{\rho}}{\rho} \right) G \operatorname{grad} \psi(\mathbf{r}') dV'.$$

интегральных характеристик внутренних звуковых полей: скалярной

$$\Phi = \int_V Q_p G(R) P(\mathbf{r}') dV' \quad (13)$$

и векторной

$$\mathbf{A} = \int_V Q_p G(R) \mathbf{v}(\mathbf{r}') dV', \quad (14)$$

которые в рассматриваемой акустической задаче играют такую же роль, какую в электродинамике играют потенциалы Герца (ср. (1)). Таким образом,

$$P_{\text{расс}} = k^2 \Phi + ik \operatorname{div} \mathbf{A}, \quad \mathbf{v}_{\text{расс}} = (k^2 - \operatorname{rot} \operatorname{rot}) \mathbf{A} + ik \operatorname{grad} \Phi. \quad (15)$$

Система уравнений (11), (12) эквивалентна исходной системе (1), что видно из прямого вычисления сумм $\nabla P + ik\mathbf{v}$ и $\nabla \cdot \mathbf{v} + ikP$ по формулам (11), (12). Поэтому на границе объема V для P и $\mathbf{v}$, даваемых уравнениями (11), (12), должны выполняться те же краевые условия (непрерывность P и нормальной компоненты $\mathbf{v}$), которые следуют из (1).

5. Мы не будем обсуждать здесь различных возможных приложений найденных интегральных уравнений в акустике и ограничимся лишь задачей о рэлеевском рассеянии, т. е. о рассеянии звука на объектах, малых по сравнению с длиной волны как внутри, так и вне V .

В рассматриваемом случае приближенное решение уравнений (11), (12) сводится к решению цепочки интегральных уравнений, соответствующих задачам теории потенциала (ср. (3)). Уравнения этой цепочки получаются, если в (11), (12) подставить вместо всех величин, зависящих от частоты, их разложения в ряды по степеням k :

$$4\pi G(R) = -\frac{1}{R} + ik + \frac{k^2}{2}R + \dots,$$

$$P_0 = \sum_{m=0}^{\infty} (-ik)^m P_0^{(m)}, \quad \mathbf{v}_0 = \sum_{m=0}^{\infty} (-ik)^m \mathbf{v}_0^{(m)},$$

$$P = \sum_{m=0}^{\infty} (-ik)^m P^{(m)}, \quad \mathbf{v} = \sum_{m=0}^{\infty} (-ik)^m \mathbf{v}^{(m)}.$$

В результате последовательно будем иметь: для первого приближения

$$P^{(0)}(\mathbf{r}) = P_0^{(0)}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0^{(0)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_V Q_p \frac{\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r}')}{R} dV'; \quad (16)$$

для второго приближения

$$P^{(1)}(\mathbf{r}) = P_0^{(1)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \int_V Q_p \frac{\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r}')}{R} dV',$$

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0^{(1)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int_V Q_p \frac{P^{(0)}(\mathbf{r}')}{R} dV' + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_V Q_p \frac{\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{r}')}{R} dV'; \quad (17)$$

для третьего приближения

$$\begin{aligned}
 P^{(2)}(\mathbf{r}) = & P_0^{(2)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \int_V Q_p \frac{P^{(1)}(\mathbf{r}')}{R} dV' + \frac{1}{4\pi} \text{rot rot} \int_V Q_p \frac{\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{r}')}{R} dV', \\
 \mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{r}) = & \mathbf{v}_0^{(2)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \int_V Q_p \frac{\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{r}')}{R} dV' + \frac{1}{4\pi} \text{grad} \int_V Q_p \frac{P^{(1)}(\mathbf{r}')}{R} dV' + \\
 & + \frac{1}{8\pi} \text{rot rot} \int_V Q_p \mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{r}') R dV' + \frac{1}{4\pi} \text{rot rot} \int_V Q_p \frac{\mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{r}')}{R} dV'.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Формулы (16) — (18) справедливы всюду в ближней зоне. Мы видим, что для точек $\mathbf{r}$, лежащих внутри объема V , задача свелась к решению последовательности интегральных уравнений для $\mathbf{v}^{(0)}$, $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$ и т. д., в то время как величины $P^{(0)}$, $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ и т. д. выражаются непосредственно через заданные функции и найденные поля предыдущих приближений. Зная P и $\mathbf{v}$ внутри объема V , нетрудно найти, используя (13) — (15), поле рассеянной звуковой волны и в дальней зоне.

6. Описанный метод очень удобен, например, для решения задачи о рассеянии на малом однородном эллипсоиде*. В этом случае интегральные уравнения для $\mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{r})$ цепочки (16) — (18) решаются точно, так как формулы для потенциалов эллипсоида (см. ⁽⁵⁻⁷⁾) сводят их к системе линейных алгебраических уравнений. В результате несколько первых членов низкочастотного разложения звуковых полей как внутри, так и вне (в ближней и дальней зонах) эллипсоида могут быть найдены аналитически.

Авторы выражают признательность М. А. Исаковичу, М. Л. Левину и С. М. Рытову за внимание к работе.

Поступило
12 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, М., «Наука», 1970. ² H. Levin, J. Schwinger, Comm. Pure and Appl. Math., v. 3, 355 (1950). ³ Н. А. Хижняк, ЖТФ, т. 28, 1592 (1958). ⁴ Lord Rayleigh, Phil. Mag., v. 44, 28 (1897). ⁵ М. Л. Левин, R. Z. Muratov, Astrophys. J., v. 166, 441 (1971). ⁶ Р. З. Муратов, Тр. Радиотехн. ин-та, № 11, 212 (1973). ⁷ М. Л. Левин, Р. З. Муратов, ЖТФ, т. 44, 263 (1974).

* В первом приближении для рассеяния плоской волны она была рассмотрена еще Рэлеем (⁴).