

С. А. ГАБОВ

К ЗАДАЧЕ С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 14 X 1975)

Математическое описание таких явлений, как стационарное течение электрического тока с учетом эффекта Холла, а также установившихся гармонических колебаний вращающейся жидкости сводится к задаче с косой производной для уравнения Лапласа. Вопросы разрешимости и единственности решения этой задачи рассматривались большим числом авторов ⁽¹⁾. В частности, в известных работах Н. И. Мусхелишвили ⁽²⁾ и И. Н. Векуа ⁽³⁾ приведены соответствующие теоремы. Доказательство этих результатов опирается на теорию сингулярных интегральных уравнений, методы которой не дают прямых численных алгоритмов решения рассматриваемой задачи.

В настоящей заметке попытаемся с помощью введения некоторого обобщенного логарифмического потенциала свести исследование разрешимости рассматриваемой задачи к исследованию разрешимости хорошо изученных интегральных уравнений Фредгольма второго рода, что, на наш взгляд, значительно упрощает рассмотрение этого вопроса. Кроме того, рассматриваемый метод исследования дает достаточно удобный алгоритм численного решения рассматриваемой здесь задачи.

Введем обобщенный логарифмический потенциал. Пусть M и P — точки плоскости (x, y) , а e — некоторое фиксированное направление, например одна из декартовых осей. Рассмотрим функцию

$$k(M, P) = \ln \frac{e^{-\alpha \Psi(M, P)}}{r(M, P)},$$

где α — фиксированное число, $r(M, P)$ — расстояние между точками M и P , а $\Psi(M, P) = \widehat{ePM}$ — угол между векторами e и $\overline{PM}$, причем $\Psi(M, P)$, вообще говоря, многозначная функция. Будем под $\Psi(M, P)$ понимать определенную ветвь этой функции, зависящую от выбора направления e и числа оборотов вектора $\overline{PM}$ вокруг точки P , т. е. от $2\pi n$.

Пусть C — некоторая кривая на плоскости, принадлежащая классу кривых Ляпунова ^(4, 5), а $v(P)$ — непрерывная на этой кривой функция.

Введем в рассмотрение функцию

$$K(M) = \int_C v(P) k(M, P) d\tau_P,$$

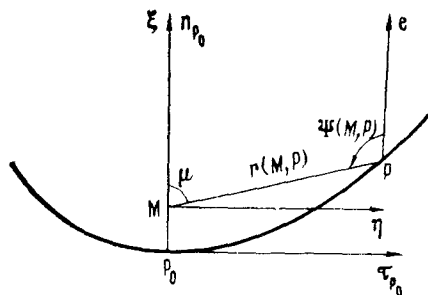


Рис. 1

которую и будем называть обобщенным логарифмическим потенциалом с плотностью v . Этот потенциал является непрерывной функцией точки M на всей плоскости и гармонической функцией всюду, кроме точек кривой C .

Будем теперь считать, что кривая C является замкнутой. Пусть $\mathbf{n}_{P_0} = (n_x, n_y)$ — внутренняя нормаль к кривой C в точке P_0 , а $\boldsymbol{\tau}_{P_0} = (n_y, -n_x)$ — вектор, касательный к кривой в точке P_0 . Изучим поведение следующей комбинации производных в окрестности кривой C :

$$\left[\frac{\partial}{\partial n_{P_0}} - \alpha \frac{\partial}{\partial \tau_{P_0}} \right] K(M).$$

Для этого вычислим производные по направлениям ξ и η (рис. 1), где ξ совпадает с нормалью $\mathbf{n}_{P_0}$, а η — коллинеарно вектору $\boldsymbol{\tau}_{P_0}$.

После вычислений для точки M , принадлежащей нормали в точке P_0 , получим

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi} - \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \right] K(M) = (1 + \alpha^2) \int_C v(P) \frac{\cos \mu(M, P)}{r(M, P)} d\tau_P, \quad (1)$$

где $\mu(M, P) = \widehat{MP\mathbf{n}_{P_0}}$ — угол между векторами $\overline{MP}$ и $\mathbf{n}_{P_0}$.

Заметим, что интеграл, стоящий в правой части формулы (1), совпадает с производной по ξ в точке M от обычного логарифмического потенциала простого слоя ^(4, 5). Если теперь воспользуемся свойствами производных обычного логарифмического потенциала ^(4, 5) и устремим точку M к точке P_0 , то получим

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow P_0} \left[\frac{\partial}{\partial n_{P_0}} - \alpha \frac{\partial}{\partial \tau_{P_0}} \right] K(M) = & \mp \pi (1 + \alpha^2) v(P_0) + \\ & + (1 + \alpha^2) \int_C v(Q) \frac{\cos \mu(P_0, Q)}{r(P_0, Q)} d\tau_Q, \end{aligned} \quad (2)$$

где знак минус берется при стремлении M к P_0 с внутренней стороны кривой C , а плюс — при стремлении M к P_0 с внешней стороны C .

Применим теперь потенциал $K(M)$ при исследовании разрешимости задач с косою производной для уравнения Лапласа.

Внутренняя задача **К**: найти гармоническую функцию $u(M)$ в области D , ограниченной контуром C , удовлетворяющую на кривой C граничному условию

$$\lim_{M \rightarrow P} \left[\frac{\partial}{\partial n_P} - \alpha \frac{\partial}{\partial \tau_P} \right] u(M) = f(P), \quad P \in C, \quad \alpha \neq \pm i, \quad (3)$$

причем точка M стремится к P по направлению нормали.

Решение этой задачи будем искать в виде обобщенного логарифмического потенциала с неизвестной плотностью v , т. е. $u = K(M)$. Используя формулу (2), получим интегральное уравнение, соответствующее рассматриваемой задаче,

$$-\pi v(P) + \int_C \frac{\cos \mu(P, Q)}{r(P, Q)} v(Q) d\tau_Q = \frac{1}{1 + \alpha^2} f(P). \quad (4)$$

Это уравнение является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Оно хорошо изучено (см., например, ^(4, 5)) и относительно него

известно, что оно разрешимо при любой непрерывной $f(P)$, удовлетворяющей условию

$$\int_C f(P) d\tau_P = 0. \quad (5)$$

Сказанное выше позволяет сформулировать теорему.

Теорема 1. Для любой ляпуновской кривой C и любой непрерывной функции $f(P)$, удовлетворяющей условию (5), существует решение внутренней задачи **К**, представимое в виде обобщенного логарифмического потенциала.

Обратимся теперь к внешней задаче **К**: найти гармоническую функцию $u(M)$ во внешней области D , ограниченной контуром C , удовлетворяющую на кривой C граничному условию (3).

Повторяя рассуждения, которые проводились при исследовании внутренней задачи **К** и используя соотношение (2), получим интегральное уравнение для неизвестной плотности v , отвечающее внешней задаче **К**,

$$\pi v(P) + \int_C \frac{\cos \mu(P, Q)}{r(P, Q)} v(Q) d\tau_Q = \frac{1}{1+\alpha^2} f(P).$$

Это уравнение также является уравнением Фредгольма второго рода. Оно разрешимо при любой непрерывной функции $f(P)$ (⁴, ⁵). Следовательно, имеет место следующая

Теорема 2. Для любой ляпуновской кривой C и любой непрерывной функции $f(P)$ существует решение внешней задачи **К**, представимое в виде обобщенного логарифмического потенциала.

В заключение рассмотрим внутреннюю задачу **Р**: найти в области D , ограниченной кривой C , гармоническую функцию $u(M)$, непрерывную в замкнутой области $\bar{D}$, имеющую непрерывные первые производные вплоть до кривой C и удовлетворяющую граничному условию

$$\lim_{M \rightarrow P} \left[\frac{\partial}{\partial n_P} - \alpha \frac{\partial}{\partial \tau_P} + \beta(P) \right] u(M) = f(P), \quad P \in C, \quad M \in D. \quad (6)$$

В граничном условии (6) считается, что α — вещественное число, функции $f(P)$ и $\beta(P)$ удовлетворяют на кривой C условию Гёльдера и функция $\beta(P) \geq 0$ и не равна тождественно нулю. Кроме того, точка M стремится к P по произвольной, не касательной к границе C кривой.

Если решение задачи **Р** будем искать в виде обобщенного логарифмического потенциала $K(M)$ с плотностью, удовлетворяющей условию Гёльдера, то, используя формулы (2) и (6), придем к интегральному уравнению для плотности v

$$-\pi v(P) + \int_C \left[\frac{\cos \mu(P, Q)}{r(P, Q)} + \frac{\beta(P)}{1+\alpha^2} \ln \frac{e^{-\alpha \Psi(P, Q)}}{r(P, Q)} \right] v(Q) d\tau_Q = \frac{1}{1+\alpha^2} f(P). \quad (7)$$

Уравнение (7) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода со слабо полярным ядром. Относительно него доказано следующее. Для любого выбора ветви $\Psi(M, P)$, за исключением, быть может, одного, неоднородное уравнение (7) всегда разрешимо для любой функции $f(P)$, удовлетворяющей условию Гёльдера, в классе функций v , удовлетворяющих тому же условию.

Таким образом, относительно задачи **Р** справедлива следующая

Теорема 3. Для любой ляпуновской кривой C и любой функции $f(P)$, удовлетворяющей на кривой C условию Гёльдера, в случае неотрицательной и не равной тождественно нулю функции $\beta(P)$, также удовлетворяющей условию Гёльдера, существует решение задачи **Р**, представимое в виде обобщенного логарифмического потенциала.

Таким образом, мы видим, что введенный обобщенный логарифмический потенциал оказывается полезным с точки зрения исследования существования решения задачи с кривой производной для уравнения Лапласа.

В заключение автор пользуется случаем поблагодарить проф. А. Г. Свешникова и А. К. Шатова за полезные обсуждения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
6 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

¹ К. Миранда, Уравнения с частными производными эллиптического типа, М., ИЛ, 1957. ² Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., «Наука», 1968. ³ И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., Физматгиз, 1959. ⁴ А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, М., «Наука», 1966. ⁵ Н. М. Гюнтер, Теория потенциала ... М., ГИТТЛ, 1953.