

Д. ДОЙЧИНОВ

О РАВНОМЕРНОМ ШЕЙПЕ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 14 VII 1975)

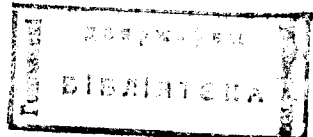
Понятие шейповой (или же фундаментальной) эквивалентности, обобщающее понятие гомотопной эквивалентности двух пространств, было введено для метрических пространств Борсуком ⁽²⁾ и Фоксом ⁽³⁾ двумя разными, неэквивалентными способами. В работе ⁽³⁾ Нгуен Ань Кьет, следуя первоначальному методу Борсука ⁽¹⁾ для случая компактных метрических пространств и заменяя обычные окрестности пространства на равномерные, а непрерывные отображения — на равномерно-непрерывные, вводит некоторое понятие «равномерно-фундаментального типа» для полных метрических пространств, которое обобщает понятие равномерно-гомотопной эквивалентности пространств*. Нетрудно, однако, видеть, что в отличие от обычной теории гомотопии равномерно-фундаментальная эквивалентность в смысле работы ⁽³⁾ не является более сильным отношением, чем фундаментальная (шейпова) эквивалентность. Так, указанные ниже в примерах пространства L_1, L_2, L_3 равномерно-фундаментально эквивалентны в смысле ⁽³⁾, хотя никакие два из них не фундаментально эквивалентны ни в смысле Борсука, ни в смысле Фокса. Причина этой ситуации состоит, видимо, в том, что равномерные окрестности довольно грубо «приближают» данное пространство.

В настоящем сообщении ** строится такое понятие равномерной шейповой эквивалентности для любых метрических пространств, которое, с одной стороны, есть обобщение обычного понятия равномерно-гомотопной эквивалентности пространств, а с другой — является более сильным отношением, чем отношение шейповой эквивалентности в смысле Фокса. Идея состоит в том, чтобы, следуя конструкции Фокса ⁽³⁾, рассмотреть все (не только равномерные) окрестности данного метрического пространства, равномерно вложенного в абсолютный равномерный окрестностный экстензор, а в определении шейпова отображения пользоваться только равномерно-непрерывными отображениями.

Прежде всего уточним, что под абсолютным равномерным окрестностным экстензором для метрических пространств — или короче $UANE(m)$ — мы будем понимать такое полное метрическое пространство M , что если A — подмножество произвольного метрического пространства X , а f — равномерно-непрерывное отображение множества A в M , то отображение f можно равномерно-непрерывно продолжить на некоторую равномерную окрестность множества A (ввиду предположения полноты пространства M не обязательно требовать, чтобы множество A было замкнутым в X). Ясно, что если пространство M является $UANE(m)$, то всякое его открытое подмножество G обладает следующим свойством: если $A \subset X$, где X — метри-

* В работе ⁽³⁾ рассматриваются только полные метрические пространства, потому что только они вкладываются замкнутым образом в абсолютные равномерные окрестностные экстензоры. Легко видеть, что без особых изменений в приведенной конструкции можно определить и равномерно-фундаментальный тип для любых метрических пространств. Он, однако, для всякого метрического пространства будет совпадать с равномерно-фундаментальным типом его пополнения.

** Эта работа выполнена во время моего пребывания в Московском университете.



ческое пространство, и если f — равномерно-непрерывное отображение множества A в G , то f можно равномерно-непрерывно продолжить на некоторую (не обязательно равномерную) окрестность U множества A .

Как известно ⁽⁶⁾, все эвклидовы пространства являются $UANE(m)$. Кроме того, известна

Лемма 1 (Исбелл ⁽⁶⁾). *Всякое метрическое пространство равномерно-гомеоморфно вкладывается в такое $UANE(m)$, которое является абсолютным равномерным окрестностным экстензором для всех (не только для метризуемых) равномерных пространств.*

Если $X \subset M$, где M — некоторое $UANE(m)$, то через $U(X, M)$ будем обозначать полную систему (т. е. множество всех) открытых окрестностей множества X в M . Если же $X \subset M$, $Y \subset N$, где M, N — два $UANE(m)$, то под равномерным шейповым отображением $f: U(X, M) \rightarrow U(Y, N)$ мы будем понимать такое семейство равномерно непрерывных отображений вида $f: U \rightarrow V$, где $U \in U(X, M)$, $V \in U(Y, N)$, которое удовлетворяет следующим требованиям:

1) если $f \in \mathbf{f}$, $f: U \rightarrow V$, $U' \subset U$, $V \subset V'$, $U' \in U(X, M)$, $V' \in U(Y, N)$ и $f': U' \rightarrow V'$, где $f' = f|_{U'}$, то $f' \in \mathbf{f}$ (здесь, как обычно, $f|_{U'}$ — ограничение отображения f на U');

2) для любого $V \in U(Y, N)$ существует такое $U \in U(X, M)$ и такое $f: U \rightarrow V$, что $f \in \mathbf{f}$;

3) если $f_1, f_2: U \rightarrow V$, $U \in U(X, M)$, $V \in U(Y, N)$ и если $f_1, f_2 \in \mathbf{f}$, то существует такое $U' \subset U$, $U' \in U(X, M)$, что $f_1|_{U'} \simeq f_2|_{U'}$ в V , где $\simeq$ есть отношение равномерной гомотопности.

Композиция gf двух равномерных шейповых отображений определяется как равномерное шейпово отображение, состоящее из всех (имеющих смысл) отображений вида gf , где $f \in \mathbf{f}$, $g \in \mathbf{g}$.

Два равномерных шейпова отображения $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ назовем равномерно гомотопными (и обозначим это как $\mathbf{f} \simeq \mathbf{g}$), если $\mathbf{f}, \mathbf{g}: U(X, M) \rightarrow U(Y, N)$ и из того, что $f, g: U \rightarrow V$, $f \in \mathbf{f}$, $g \in \mathbf{g}$, следует, что $f|_{U'} \simeq g|_{U'}$ в V для некоторого $U' \subset U$, $U' \in U(X, M)$.

Отношение $\simeq$ между равномерными шейповыми отображениями является отношением эквивалентности *.

Дальше вводится отношение $U(X, M) \simeq U(Y, N)$, означающее, что существуют такие $\mathbf{f}: U(X, M) \rightarrow U(Y, N)$ и $\mathbf{g}: U(Y, N) \rightarrow U(X, M)$, что $gf \simeq \text{id}_{U(X, M)}$, $fg \simeq \text{id}_{U(Y, N)}$ (где $\text{id}_{U(X, M)}$, $\text{id}_{U(Y, N)}$ — равномерное шейпово отображение, состоящее из всевозможных вложений множеств U для всех $U \in U(X, M)$, $U \in U(Y, N)$ соответственно) и доказывается, что это отношение эквивалентности. Потом доказывается

Теорема 1. *Если метрическое пространство X равномерно-гомеоморфно вложено в M и в M' , а метрическое пространство Y равномерно-гомеоморфно вложено в N и в N' , где M, M', N, N' — некоторые $UANE(m)$, и если $U(X, M) \simeq U(Y, N)$, то $U(X, M') \simeq U(Y, N')$.*

Эта теорема дает возможность заключить, что отношение $U(X, M) \simeq U(Y, N)$ на самом деле не зависит от пространств M и N , куда вложены равномерно пространства X и Y , как впрочем и от самого вложения, т. е. что класс эквивалентности, содержащий данное $U(X, M)$, зависит только от самого пространства X . Этот класс будем называть равномерным шейпом пространства X и обозначать его $USh X$.

Теорема 2. *Если метрические пространства X и Y равномерно-гомотопны эквивалентны, то $USh X = USh Y$.*

Теорема 3. *Если X и Y — некоторые $UANE(m)$, то $USh X = USh Y$ тогда и только тогда, когда X и Y равномерно-гомотопны эквивалентны.*

Чтобы выяснить связь между введенным нами равномерным шейпом

* Введенные выше определения сделаны по подобию соответствующих определений в работе Фокса ⁽³⁾ в их формулировке, данной в работе Годлевского и Новачка ⁽⁴⁾.

данного метрического пространства и его шейпом в смысле Фокса, установим следующее утверждение.

Лемма 2. *Если M — такое $UANE(m)$, которое является абсолютным равномерным окрестностным экстензором для всех равномерных пространств, то тогда M является и абсолютным окрестностным ретрактом ANR для метрических пространств.*

Доказательство. Пусть A — замкнутое подмножество некоторого метрического пространства X и пусть f — непрерывное отображение множества A в M . Тогда отображение f будет в то же время и равномерно-непрерывным относительно максимальной (согласованной с порожденной метрикой топологией) равномерной структуры на A , которая (ввиду замкнутости множества A) совпадает с той, которая индуцируется максимальной равномерной структурой Σ на X . Тогда отображение f продолжится в равномерно непрерывное (относительное Σ) отображение, определенное на некоторую окрестность U множества A , которое и будет непрерывным относительно данной (метрической) топологии на U . Этим доказано, что пространство M — абсолютный окрестностный экстензор, а следовательно, и абсолютный окрестностный ретракт для метрических пространств.

Теперь, обозначая через $Sh X$ шейп метрического пространства X в смысле Фокса, легко убедиться, что справедлива

Теорема 4. *Для любых метрических пространств X и Y из $USh X = USh Y$ следует $Sh X = Sh Y$.*

Доказательство. Согласно леммам 1 и 2, метрические пространства X и Y можно равномерно гомеоморфно вложить в такие метрические пространства M и N соответственно, которые являются одновременно $UANE(m)$ и ANR . Но тогда, по одной теореме Химана ⁽⁵⁾, пространства X и Y можно, уже только гомеоморфно, но зато замкнутым образом вложить в некоторые метрические ANR -пространства M' и N' соответственно, причем таким образом, что $U(X, M) \sim U(X, M')$ и $U(Y, N) \sim U(Y, N')$, где через $\sim$ обозначено отношение эквивалентности между полными системами окрестностей, введенное в ⁽³⁾. Так как по условию $U(X, M) \simeq U(Y, N)$, а отношение $\simeq$, очевидно, сильнее отношения $\sim$, то заключаем, что $U(X, M') \sim U(Y, N')$, или, что то же самое, что $Sh X = Sh Y$.

Известно ⁽⁷⁾, что всякое открытое покрытие любого подмножества A метрического пространства X можно подобно (т. е. так, чтобы сохранялся нерв покрытия) продолжить в открытое покрытие некоторой окрестности множества A . Несколько изменив доказательство, данное в ⁽⁷⁾, можно убедиться, что верна еще

Лемма 3. *Всякое равномерное открытое покрытие некоторого подмножества A метрического пространства X можно подобно продолжить в равномерное открытое покрытие некоторой (равномерной) окрестности множества A .*

Используя эту лемму, а также тот факт, что направленное множество всех равномерных покрытий (упорядоченное отношением вписанности) всякого метрического пространства содержит счетную кофинальную часть, можно доказать, что справедлива

Теорема 5. *Если X и Y — метрические пространства и если $USh X = USh Y$, то для спектральных групп гомологий и когомологий, определенных относительно всех равномерных открытых покрытий пространства (при произвольной абелевой группе G коэффициентов) имеем $H_n(X; G) \approx H_n(Y; G)$ и $H^n(X; G) \approx H^n(Y; G)$ для любого n .*

Примеры. В том, что введенная нами равномерная шейповая эквивалентность — существенно более слабое отношение, чем обычная равномерно гомотопная эквивалентность пространств, можно убедиться на указанном еще Борсуком ⁽¹⁾ примере «варшавской окружности», которая, как это легко видеть, имеет тот же равномерный шейп, что и обычная окружность, хотя эти два пространства не равномерно-гомотопны эквивалентны.

Нетрудно построить также пример двух некомпактных метрических пространств с подобным свойством. С другой стороны, равномерная шейповая эквивалентность — существенно более сильное отношение, чем шейповая эквивалентность в смысле Фокса. Так, данное ниже пространство L_1 гомеоморфно $\mathbb{R}$, значит, шейпово эквивалентно действительной прямой, но эти два пространства, как это нетрудно увидеть, не равномерно шейпово эквивалентны.

Наконец, для того чтобы усмотреть разницу между введенным нами понятием равномерной шейповой эквивалентности и понятием равномерно фундаментальной эквивалентности в смысле работы ⁽⁸⁾, укажем на следующие пространства, рассматриваемые все на плоскости (т. е. взятые с индуцированной из плоскости метрикой):

$$L_1 = \{(x, y) : y^2(x+1)^2 = x\};$$

$$L_2 = L_1 \cup \{(x, 0) : x \geq 1\};$$

$$L_3 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, 0) : x \geq 1\};$$

$$L_4 = L_1 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Все четыре пространства равномерно-фундаментально эквивалентны* в смысле работы ⁽⁸⁾, и в то же время у любых двух из них разные равномерные шейпы в смысле введенного здесь понятия.

Институт математики и механики
Болгарской Академии наук
София, Болгария

Поступило
7 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ K. Borsuk, Fund. Math., v. 62, 223 (1968). ² K. Borsuk, Bull. Acad. polon. sci., v. 18, 427 (1970). ³ R. Fox, Fund. Math., v. 74, 47 (1972). ⁴ S. Godlewski, S. Nowak, Bull. Acad. polon. sci., v. 20, 387 (1972). ⁵ D. M. Hyman, Fund. Math., v. 75, 205 (1972). ⁶ J. R. Isbell, Uniform Spaces, 1964. ⁷ K. Кураговский, Топология, т. 1, 1966. ⁸ Нгуен Ань Куен, Bull. Acad. polon. sci., v. 23, 55 (1975).

* Пространство L_4 не полно, но мы можем, тем не менее, говорить о его равномерно-фундаментальном типе в смысле работы ⁽⁸⁾ ввиду сделанного нами ранее замечания.