

М. Г. КРЕЙН, Г. К. ЛАНГЕР

ОБ ИНДЕФИНИТНОЙ СТЕПЕННОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 24 III 1975)

1. Через H_κ обозначим класс всех вещественных последовательностей $\underline{s} = (s_j)$, $j=0, 1, 2, \dots$, для которых при достаточно большом n форма $\sum_{j,k=0}^n s_{j+k} \xi_j \bar{\xi}_k$ имеет κ отрицательных квадратов (κ — целое число ≥ 0). Положим $D_n = \det (s_{j+k})_{j,k=0,1,\dots,n}$, $n=0, 1, \dots$. По известным правилам Фробениуса, число κ вычисляется по знакам определителей D_n ⁽¹⁾. В частности, для $\underline{s} \in H_\kappa$ существует такое n_0 , что все D_n , $n \geq n_0$, либо равны нулю, либо имеют одинаковый знак. В первом случае ряд $\sum_{j=0}^\infty s_j/z^{j+1}$ сходится в окрестности ∞ и определяет рациональную в комплексной плоскости функцию. В дальнейшем всегда предполагается, что имеет место второй случай.

Пусть N_κ обозначает класс мероморфных в открытой верхней полуплоскости комплекснозначных функций Q , для которых ядро $(Q(z) - \overline{Q(\xi)}) \times \times (z - \bar{\xi})^{-1}$ ($z, \xi \in C_Q$) имеет κ отрицательных квадратов; при этом C_Q — множество регулярных точек функции Q . Если для $z = iy$, $y > 0$, функция $Q \in N_\kappa$ имеет асимптотику

$$Q(z) \sim -s_0 z^{-1} - s_1 z^{-2} - s_2 z^{-3} - \dots \quad (z \rightarrow \infty), \quad (1)$$

то будем писать $S(Q) = \underline{s}$. Оказывается, в этом случае $\underline{s} \in H_{\kappa'}$, при некотором κ' , $0 \leq \kappa' \leq \kappa$, и при любом θ , $0 \leq \theta < \pi/2$, имеет место (1) равномерно в угле $\omega_\theta = \{z: \pi/2 - \theta \leq \arg z \leq \pi/2 + \theta\}$. Проблема $\underline{P}(H_\kappa)$ для данной последовательности $\underline{s} \in H_\kappa$ заключается в следующем: дать описание всех функций $Q \in N_\kappa$ со свойством $S(Q) = \underline{s}$. Как известно ⁽³⁾, для $\underline{s} \in H_0$ проблема $\underline{P}(H_0)$ эквивалентна проблеме описания всех решений проблемы моментов Гамбургера.

Теорема 1. Для данной последовательности $\underline{s} \in H_\kappa$ проблема $\underline{P}(H_\kappa)$ имеет либо единственное решение, либо бесконечное число решений. Во втором случае существуют четыре целые функции $w_{ij}(z)$, $i, j=1, 2$, минимального экспоненциального типа такие, что соотношение

$$Q(z) = (w_{11}(z) \tau(z) + w_{12}(z)) (w_{21}(z) \tau(z) + w_{22}(z))^{-1} \quad (2)$$

дает взаимно однозначное соответствие между всеми решениями Q и всеми функциями $\tau \in \bar{N}_0^*$. При этом матрица-функция $W(z) = (w_{ij}(z))$ определяется единственным образом, если потребовать $W(0) = I_2$ и $\det W(z) = 1$ для всех комплексных z .

2. Пусть для $\underline{s} \in H_\kappa$ число n_0 обозначает индекс, начиная с которого все определители D_n имеют одинаковый знак. Системы многочленов первого и второго рода $(e_n(z))$ и $(f_n(z))$, $n=0, 1, \dots$, определяются следующим образом. Выбираем произвольный базис $e_0(z), e_1(z), \dots, e_{n_0}(z)$ в линейной

* Через N_0 обозначается множество N_0 , дополненное функцией $\tau(z) = \infty$.

оболочке функций $1, z, \dots, z^{n_0}$, а при $n \geq n_0 + 1$ полагаем

$$e_n(z) = \frac{\operatorname{sgn} D_{n-1}}{\sqrt{D_{n-1} D_n}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} & s_{2n-1} \\ 1 & z & \dots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix},$$

$$f_n(z) = \mathfrak{S}_t \left(\frac{e_n(z) - e_n(t)}{z - t} \right), \quad n = 0, 1, \dots,$$

где через $\mathfrak{S}_t$ обозначается функционал, переводящий многочлен $p(t) = \sum a_\mu t^\mu$ в $\mathfrak{S}(p(t)) = \sum a_\mu s_\mu$. Для последовательности $(e_n(z))$ имеют место следующие соотношения ортогональности: $\mathfrak{S}_t(e_n(t)e_j(t)) = \delta_{nj}$ при $n \geq n_0 + 1, j \geq 0$.

Теорема 2. Для каждой системы многочленов первого и второго рода существует число $h > 0$ такое, что все нули этих многочленов ($\neq 0$) лежат в полосе $\{z: |\operatorname{Im} z| \leq h\}$. При $n \geq n_0 + 1$ нули многочленов $e_n(z)$, за исключением не более чем κ пар (расположенных симметрично относительно вещественной оси), вещественны.

Теорема 3. Если для $\underline{s} \in H_\kappa$ проблема $P(H_\kappa)$ определенная, то каждый из рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} |e_n(z)|^2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|^2 \quad (3)$$

расходится для всех не вещественных z за исключением не более чем κ пар точек, расположенных симметрично относительно вещественной оси; если проблема неопределенная, то оба ряда (3) сходятся для всех z , причем равномерно на любой компактной части комплексной плоскости.

Можно показать, что проблема $P(H_\kappa)$ для $\underline{s}$ является определенной тогда и только тогда, когда по крайней мере один из рядов (3) расходится при $z=0$.

Многочлены $e_0(z), e_1(z), \dots, e_{n_0}(z)$ можно, в частности, выбрать таким образом, чтобы для системы $(e_n(z)), n=0, 1, 2, \dots$, выполнялись следующие условия:

- а) $e_n(z)$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами причем старший коэффициент положителен;
- б) для индекса n существует индекс n' такой, что $\mathfrak{S}_t(e_n(t)e_{n'}(t)) = \varepsilon_n \delta_{n'n}$, где $\varepsilon_n = \pm 1$ (очевидно, при $n \geq n_0 + 1$ всегда $n' = n$ и $\varepsilon_n = 1$). Тогда, если проблема $P(H_\kappa)$ для $\underline{s} \in H_\kappa$ неопределенная, то имеют место соотношения

$$\omega_{11}(z) = 1 + z \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n f_n(z) \overline{e_{n'}(0)}, \quad \omega_{12}(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n f_n(z) \overline{f_{n'}(0)},$$

$$\omega_{21}(z) = -z \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e_n(z) \overline{e_{n'}(0)}, \quad \omega_{22}(z) = 1 - z \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e_n(z) \overline{f_{n'}(0)}.$$

В этом случае ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e_n(z) \overline{e_{n'}(\bar{z})}$ сходится и определяет вещественную целую функцию минимального экспоненциального типа, которую в дальнейшем будем обозначать через $1/\rho(z)$.

3. Пусть $s \in H_*$. Имеется взаимно однозначное соответствие между решениями $Q \in N_*$ проблемы $P(H_*)$ и интегральными представлениями для $\underline{s}$ вида (ср. (4, 5)):

$$s_n = \int_{-\infty}^{\infty} (t^n - S_n(t)) \frac{d\sigma(t)}{\prod_{j=1}^p (t - \alpha_j)^{2\rho_j}} + \sum_{j=1}^p \sum_{v=0}^{\min(v_j, n)} a_{jv} \binom{n}{v} \alpha_j^{n-v} + \\ + \sum_{k=1}^q \beta_k^n \mu_k + \sum_{l=1}^r (Q_l(n) \gamma_l^n + \bar{Q}_l(n) \bar{\gamma}_l^n), \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где: а) $p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0$; α_j, β_k — различные вещественные, γ_l — невещественные числа; ρ_j, v_j — целые числа ≥ 0 , при этом $v_j > 0$, если $\rho_j = 0$; б) σ — неубывающая и непрерывная слева функция на R^1 , непрерывная в точках α_j ; $\sigma(-\infty) = 0, \int_{-\infty}^{\infty} |t|^n d\sigma(t) < \infty$ при $n=0, 1, \dots$, а $\int_{-\infty}^{\infty} (t - \alpha_j)^{-2} d\sigma(t) = \infty$, если $\rho_j > 0$; $\mu_k < 0$; в) $S_n(t)$ — регуляризирующая поправка, точнее, многочлен наименьшей степени ($\leq 2 \sum_{j=1}^p \rho_j - 1$), обладающий тем свойством, что разность $t^n - S_n(t)$ имеет в точках α_j нули порядка $\geq 2\rho_j$; г) $a_{jv}, v=0, 1, \dots, r_j$ — вещественные коэффициенты, причем в случае $\rho_j = 0$ всегда $a_{jv_j} \neq 0$; д) Q_l — многочлен степени $v_l - 1$; е) $\kappa = \sum_{j=1}^p (\max(\rho_j, [(v_j + 1)/2]) - \delta_j) + q + \sum_{l=1}^r v_l$, где $\delta_j = 1$, если $v_j > 2\rho_j$, v_j — нечетное число и $a_{jv_j} < 0$, и $\delta_j = 0$

в остальных случаях ($j=1, 2, \dots, p$; $k=1, 2, \dots, q$; $l=1, 2, \dots, r$). Пусть теперь проблема $P(H_*)$ для $\underline{s}$ неопределенная. Тогда существует компактное подмножество Γ комплексной плоскости, состоящее из не более чем 2κ компонент (замкнутых, связных, непересекающихся подмножеств) и такое, что у любого представления (4) все точки $\alpha_j, \beta_k, \gamma_l, \bar{\gamma}_l$ лежат в Γ и этими точками Γ и исчерпывается. Обозначим открытое ядро множества Γ через Γ^0 . Точки $x \in R^1 \setminus \Gamma$ будем называть точками положительного типа (для них $\rho(x) > 0$), а точки $x \in R^1 \cap \Gamma^0$ — отрицательного типа для $\underline{s}$ (для них $\rho(x) < 0$). Точки из $R^1 \cap (\Gamma \setminus \Gamma^0)$ называются критическими для $\underline{s}$; они совпадают с вещественными полюсами функции $\rho(z)$. Таким образом, вещественная ось в случае неопределенности проблемы $P(H_*)$ распадается на конечное число открытых интервалов, состоящих из точек одного типа, а также на конечное число изолированных критических точек, причем последние являются общими концами двух таких интервалов. В представлении (4) точки β_k — отрицательного типа, а точки α_j — либо отрицательного типа, либо являются критическими для $\underline{s}$.

В неопределенном случае решение $Q \in N_*$ проблемы $P(H_*)$ для $\underline{s} \in H_*$ (равно как и соответствующее интегральное представление (4)) будем называть каноническим, если оно получается из (2) при $\tau(z) = \tau = \text{const}$ ($\tau = \bar{\tau}$, возможно и $\tau = \infty$). Тогда σ в представлении (4) — функция чистых скачков, находящихся в нулях $t_v, v=0, 1, 2, \dots$, целой функции

* Если одно из этих чисел равно 0, то соответствующие члены в (4) отсутствуют.

Например, при $p=0$ интеграл приобретает вид $\int_{-\infty}^{\infty} t^n d\sigma(t)$.

минимального экспоненциального типа, и (4) принимает вид *

$$s_n = \sum_{v=0}^{\infty} t_v^n \mu_v + \sum_{j=1}^p \sum_{v=0}^{\min(r_j, n)} a_{jv} \binom{n}{v} \alpha_j^{n-v} + \sum_{k=1}^q \beta_k^n \mu_k + \\ + \sum_{i=1}^r (Q_i(n) \gamma_i^n + \bar{Q}_i(n) \bar{\gamma}_i^n), \quad n=0, 1, \dots \quad (5)$$

Множество точек t_v , α_j , β_k , γ_i , $\bar{\gamma}_i$ будем называть спектром представления (5).

Теорема 4. Пусть проблема $P(H_*)$ для $\underline{s}$ неопределенная.

Тогда: 1) Каждая точка из $R \cup (\Gamma \setminus \Gamma^0)$ принадлежит спектру одного и только одного канонического представления. 2) Каждое каноническое представление (5) имеет в любой компоненте множества Γ по меньшей мере одну спектральную точку. 3) Спектральные точки $t_v(\beta_k)$ из (5) — положительного (отрицательного) типа, а точки α_j — критические для s .

Из результатов (6), § 6, следует, что при возрастании τ в соответствующем каноническом представлении (5) точки t_v , α_j , β_k ведут себя определенным образом.

Представление (4) будем называть представлением чистого гиперболического типа, если $p=q=0$. Из (6) (следствие 6.2) непосредственно следует, что $\underline{s} \in H_*$ в случае неопределенности проблемы $P(H_*)$ всегда допускает представление чисто гиперболического типа. Можно показать, что существуют последовательности $\underline{s} \in H_*$, для которых $P(H_*)$ — неопределенная проблема и все представления (4) — чисто гиперболического типа.

Заканчивая, отметим, что результаты этой заметки были получены на основе общих результатов из (6) по теории расширений λ -эрмитовых операторов. При этом также пришлось обобщить основные результаты теории целых эрмитовых операторов в гильбертовом пространстве (7) на случай пространства Π_* .

Одесский инженерно-строительный институт

Дрезденский технический университет
ГДР

Поступило
11 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, изд. 3, М., «Наука», 1967. ² И. С. Нохвизов, Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы, М., «Наука», 1974. ³ Н. И. Ахиезер, Классическая проблема моментов, М., «Физматгиз», 1961. ⁴ C. Y. Lo, Ph. D. Thesis, Queen's University, Kingston (Ont.), 1966. ⁵ В. И. Плющева, ДАН, т. 145, № 3, 534 (1962). ⁶ М. Г. Крейн, Г. К. Лангер, Функциональный анализ и его приложения, т. 5, № 2, 59 (1971); т. 5, № 3, 54 (1971). ⁷ М. Г. Крейн, Укр. матем. журн., т. 1, № 2, 3 (1949).

* При этом, очевидно, все величины правой части в (5) могут зависеть от τ . Отметим, что существуют и неканонические представления, имеющие вид (5).