

УДК 518:517.91/.94

МАТЕМАТИКА

Н. Я. ЛЯЩЕНКО, И. Ф. ГЕЗЬ, А. Г. ОЛЕЙНИК

О ДВУСТОРОННИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ТИПА РУНГЕ — КУТТА

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 29 IX 1975)

При численном решении математических задач часто используют двусторонние методы, дающие возможность решения задачи взять в «вилку» наперед заданной точности.

Для нахождения численного решения y_1 задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in G \quad (1)$$

(функция $f(x, y)$ определена и достаточно гладкая в области G) в точке $x_1 = x_0 + h$, $h > 0$, строятся двусторонние формулы типа Рунге — Кутта ⁽¹⁻⁹⁾, все узлы которых являются кратными (п. 1), с одним m -кратным и остальными простыми узлами (п. 2) и с шестью простыми узлами (п. 3). Эти формулы дают возможность построить на каждом шаге интегрирования два приближения к искомому решению — верхнее и нижнее. В качестве приближенного решения задачи ⁽¹⁾ принимается полусумма двусторонних приближений, а модуль полуразности их дает пределы для допускаемой при этом погрешности.

Параметры двусторонних формул различного порядка точности определяют так, чтобы остаточный член $R(f) = y(x_1) - y_1$ был представим в виде

$$R(f) = C \omega h^p \Psi(f)_0 + O(h^{p+1}), \quad (2)$$

где $C = \text{const}$, p — порядок точности метода, $\Psi(f)_0$ — некоторый дифференциальный оператор, вычисленный в точке (x_0, y_0) , причем $\Psi(f)_0 \neq 0$, ω — действительный параметр, принимающий для двусторонних приближений два значения, которые отличаются лишь знаком.

1. Для решения задачи (1) явные двусторонние формулы типа Рунге — Кутта с кратными узлами ^(13, 14) вида

$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=0}^{n-1} c_i^{(1)} k_i^{(1)} + \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} c_i^{(2)} k_i^{(2)} + \dots + \frac{h^m}{m!} \sum_{i=0}^{n-1} c_i^{(m)} k_i^{(m)};$$

$$k_i^{(p)} = D^{p-1} f(x_0 + \alpha_i h, y_0 + k_i) \quad q = 1(1)m, \quad k_0 = 0; \quad (3)$$

$$k_i = h \sum_{j=0}^{i-1} b_{ij}^{(1)} k_j^{(1)} + \frac{h^2}{2!} \sum_{j=0}^{i-1} b_{ij}^{(2)} k_j^{(2)} + \dots + \frac{h^m}{m!} \sum_{j=0}^{i-1} b_{ij}^{(m)} k_j^{(m)},$$

где $D = \frac{\partial}{\partial x} - f \frac{\partial}{\partial y}$, $D^{q-1} f = D(D^{q-2} f)$, $D^0 f = f$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_i \in (0, 1]$, $\alpha_i \neq \alpha_j$

($i \neq j$), n — количество узлов, m — их кратность, построены для $n=2$ с $m \geq 2$ и $n=3, 4$ с $m=2, 3$. Эти формулы имеют порядок точности $m+1$, причем для каждого n построено несколько семейств двусторонних формул одинакового порядка точности. Для указанных значений n приведем параметры только одного из построенных семейств вместе с соответствующим ему остаточным членом.

Указанные семейства двусторонних формул вида (3) определяются следующими параметрами:

при $n=2$

$$\begin{aligned} c_0^{(k)} &= 1 - 0,5k(k-1)c_1^{(2)}\alpha_1^{k-2}, \quad b_{10}^{(k)} = \alpha_1^k, \quad k = 1(1)m, \\ c_1^{(1)} &= 0, \quad c_1^{(2)} = \frac{2}{m(m+1)\alpha_1^{m-1}}, \quad \alpha_1 = \frac{m}{m+2} - m(m+1)!\omega, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\omega \in \left(-\frac{2}{m(m+2)!}, \frac{1}{(m+2)!} \right), \quad R(f) = \omega h^{m+2} D^{m+1} f(x_0, y_0) + O(h^{m+3}),$$

при $n=3$ и $m=2$

$$\begin{aligned} b_{10}^{(1)} &= 0,4, \quad b_{10}^{(2)} = 0,16, \quad b_{20}^{(1)} = 1, \quad b_{20}^{(2)} = 0,5(3\omega - 1), \\ \alpha_1 &= 0,4, \quad \alpha_2 = 1, \quad c_0^{(1)} = 1, \quad c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = b_{21}^{(1)} = 0, \quad c_1^{(2)} = \frac{25}{36}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$c_2^{(2)} = \frac{1}{18}, \quad b_{21}^{(2)} = 1,5(1 - \omega), \quad c_0^{(2)} = 0,25,$$

$$R(f) = \frac{h^5}{5!} \omega \Psi(f)_0 + O(h^6), \quad \Psi(f) = D^2 f[A^1(f_y) + f_y^2],$$

при $n=4$, $m=2$

$$c_i^{(1)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad b_{21}^{(1)} = b_{31}^{(1)} = b_{32}^{(1)} = 0,$$

$$b_{10}^{(1)} = \alpha_1 = 0,25, \quad b_{20}^{(1)} = \alpha_2 = 2/3,$$

$$b_{30}^{(1)} = \alpha_3 = 1, \quad c_0^{(1)} = 1, \quad c_0^{(2)} = 0,15, \quad c_1^{(2)} = 128/225, \quad c_2^{(2)} = 0,27, \quad c_3^{(2)} = 1/90,$$

$$b_{21}^{(2)} = 4/81(1 + \omega), \quad b_{31}^{(2)} = -12(0,2 + 2\omega), \quad b_{32}^{(2)} = 0,9, \quad b_{30}^{(2)} = 2,5 + 24\omega, \quad (6)$$

$$b_{20}^{(2)} = -4/81(1 + 10\omega), \quad R(f) = \frac{h^6}{6!} \omega \Psi(f)_0 + O(h^7),$$

$$\Psi(f) = 4D^2 f[A^2(f_y) + A^1(f)f_{y^2} + 2A^1(f)f_y].$$

В формулах (5) и (6) использованы обозначения

$$A^n(u) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right)^n u = \sum_{j=0}^n C_n^{jf} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j} \partial y^j}.$$

2. Двусторонние формулы типа Рунге — Кутты с одним m -кратным и остальными простыми узлами вида

$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^{n-1} c_i^{(1)} k_i^{(1)} + \sum_{j=1}^m \frac{h^j}{j!} c_0^{(j)} k_0^{(j)},$$

$$k_i^{(1)} = f(x_0 + \alpha_i h, y_0 + k_i), \quad k_0 = D^{q-1} f(x_0, y_0) q = 1(1)m, \quad (7)$$

$$k_i = h \sum_{j=0}^{i-1} b_{ij}^{(1)} k_j^{(1)} + \sum_{j=2}^m \frac{h^j}{j!} b_{i0}^{(j)} k_0^{(j)}$$

построены для $n=1, 2, 3$ с $m \geq 2$ и для $n=4, 5$ с $m=2, 3$. Порядок точности таких формул $m+n-1$. Формулы вида (7) представляют собой двусторон-

ний аналог методов типа Рунге — Кутта, предложенных Фельбергом ⁽¹¹⁾.

При $n=1$ формулы вида (7) дают двустороннее разложение искомого решения по формуле Тейлора, параметры которого равны

$$c_0^{(j)} = 1, \quad j = 1(1)\overline{m-1}, \quad c_0^{(m)} = 1 - \omega, \quad |\omega| < 1, \quad (8)$$

$$R(f) = \frac{h^m}{m!} \omega D^{m-1} f(x_0, y_0) + O(h^{m+1}).$$

Одно из семейств формул вида (7) определяется параметрами:
при $n=2$

$$\alpha_1 = 1, \quad c_0^{(k)} = \frac{1}{m+1} (m - k + 1 + k\omega), \quad b_{10}^{(k)} = 1, \\ k = 1(1)m, \quad c_1^{(1)} = \frac{1 - \omega}{m+1}, \quad (9)$$

$$\omega \in \left[-\frac{1}{m}, 1 \right], \quad R(f) = \frac{\omega}{(m+1)!} h^{m+1} D^m f(x_0, y_0) + O(h^{m+2}),$$

при $n=3$

$$b_{10}^{(k)} = \alpha_1^k, \quad b_{20}^{(k)} = \alpha_2^k - k b_{21}^{(1)} \alpha_1^{k-1}, \quad c_0^{(k)} = 1 - k c_2^{(1)} \alpha_2^{k-1}, \quad k = 1(1)m, \\ \alpha_1 = \frac{m+1}{(m+2)\sqrt{m+2}}, \quad \alpha_2 = \frac{m+1}{m+2}, \quad c_1^{(1)} = 0, \quad c_2^{(1)} = \frac{(m+2)^m}{(m+1)^{m+1}}, \quad (10)$$

$$b_{21}^{(1)} = 1 - \omega, \quad |\omega| \leq 1, \quad R(f) = \frac{\omega}{(m+2)!} h^{m+2} [f_y D^m f]_0 + O(h^{m+3}).$$

3. Двусторонние приближения задачи (1) типа Рунге — Кутта с простыми узлами пятого порядка точности ищутся ⁽¹²⁾ в виде

$$y_1 = y_0 + \sum_{i=1}^6 c_i k_i, \quad (11)$$

где

$$k_1 = h f(x_0, y_0), \quad (12)$$

$$k_i = h f \left(x_0 + \alpha_i h, y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \right), \quad i = 2, \dots, 6,$$

причем

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}, \quad \alpha_i \in (0, 1], \quad \alpha_i \neq \alpha_j \quad (i \neq j), \quad i = 2, \dots, 6.$$

В этом случае построено 8 семейств двусторонних формул вида (11), (12), отвечающих различным дифференциальным операторам Ψ . Приведем только выражения для коэффициентов семейства формул вида (11), (12), отвечающих оператору

$$\Psi(f) = f_y^3 A^1(f).$$

При $\omega \neq 1/720$ имеем

$$c_2 = c_3 = c_4 = \beta_{65} = 0, \quad \alpha_2 = 0,2, \quad \alpha_3 = 0,5, \quad \alpha_4 = 1,$$

$$\alpha_5 = 0,1(6 + \sqrt{6}), \quad \alpha_6 = 0,1(6 - \sqrt{6}), \quad c_1 = 1/9, \quad c_5 = \frac{16 - \sqrt{6}}{36},$$

$$c_6 = \frac{16 + \sqrt{6}}{36}, \quad \beta_{21} = 0,2, \quad \beta_{31} = 0,25(360\omega - 1), \quad \beta_{32} = 0,75(1 - 120\omega),$$

$$\begin{aligned}\beta_{41} &= 3(1-320\omega), \quad \beta_{42} = 960\omega - 14/3, \quad \beta_{43} = 5/3, \\ \beta_{51} &= \frac{9 - \sqrt{6} - 720\omega(12 + 7\sqrt{6})}{100(1 - 720\omega)}, \quad \beta_{52} = \frac{16 + \sqrt{6} - 240\omega(33 - 37\sqrt{6})}{80(1 - 720\omega)}, \\ \beta_{53} &= \frac{7 + 2\sqrt{6} - 480\omega(12 + 7\sqrt{6})}{25(1 - 720\omega)}, \quad \beta_{54} = \frac{12 + 7\sqrt{6} - 720\omega(9 - \sqrt{6})}{400(1 - 720\omega)}, \\ \beta_{61} &= \frac{9 + \sqrt{6} - 720\omega(12 - 7\sqrt{6})}{100(1 - 720\omega)}, \quad \beta_{62} = \frac{16 - \sqrt{6} - 240\omega(33 + 37\sqrt{6})}{80(1 - 720\omega)}, \\ \beta_{63} &= \frac{7 - 2\sqrt{6} - 480\omega(12 - 7\sqrt{6})}{25(1 - 720\omega)}, \quad \beta_{64} = \frac{12 - 7\sqrt{6} - 720\omega(9 + \sqrt{6})}{400(1 - 720\omega)},\end{aligned}$$

причем

$$R(f) = \omega h^5 \Psi(f)_0 + O(h^6).$$

4. Построенные выше двусторонние формулы зависят, вообще говоря, от двух параметров ω и h , варьированием которых можно обеспечить двусторонность и требуемую точность (², ⁴, ⁵).

Аналогичным образом можно построить двусторонние формулы вида (3) и (7) и для других значений n и m , а также для случая нелинейных интегральных и интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра.

Если правая часть дифференциального уравнения (1) не зависит от y , то изложенный метод дает возможность построить двусторонние квадратуры с простыми и кратными узлами (⁸⁻¹⁰).

Киевский государственный педагогический институт им. А. М. Горького

Поступило
10 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Я. Ремез, Зап. Природничо-технічного відділу АН УРСР, № 4, 1 (1931).
- ² А. Д. Горбунов, Ю. А. Шахов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 3, № 2, 239 (1963); там же, т. 4, № 3, 426 (1964).
- ³ С. З. Зарубич, Доп. АН УРСР, № 10, 1278 (1965).
- ⁴ В. Е. Шилов, Вычисл. методы и программир., в. 8, 200 (1967).
- ⁵ Ю. А. Шахов, Тр. ВЦ АН ГрузССР, т. 12, № 1, 105 (1973).
- ⁶ А. Н. Ломакович, В сб.: Матем. обеспеч. вычислит. систем и организац. вычислит. процесса, Киев, 1973, стр. 99.
- ⁷ Н. Я. Лященко, И. Ф. Гезь, В сб.: Прибл. методы матем. анализа, Киев, 1974, стр. 45.
- ⁸ Н. Я. Лященко, А. Г. Олейник, В сб.: Прибл. методы матем. анализа, Киев, 1974, стр. 33.
- ⁹ Н. Я. Лященко, И. Ф. Гезь, А. Г. Олейник, Тр. научн. конфер. Вычисл. матем. в современном научно-техн. прогрессе, Вычисл. методы в матем. физике, теории управления и оптимиз., в. 2, Канев, 1974, стр. 46.
- ¹⁰ Н. Я. Лященко, И. Ф. Гезь, Вычисл. и прикл. матем., в. 26 (1975).
- ¹¹ E. Fehlberg, Zs. angew. Math. u. Mech., B. 40, 252 (1960).
- ¹² J. C. Butcher, J. Austral. Math. Soc., v. 4, 179 (1964).
- ¹³ G. Wanner, Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen, Mannheim, 1969.
- ¹⁴ K. H. Kastlunger, G. Wanner, Computing, v. 9, 9 (1972).