

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

А. В. ОСТРОВСКИЙ

О НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ τ — A -МНОЖЕСТВАХ
И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 23 VII 1975)

1. Вопрос, когда абсолютное τ — A -множество содержит замкнутое подпространство, гомеоморфное пространству Бэра $B(\tau)$, исследован для кардиналов $\tau > \aleph_0$ в работах ⁽¹⁻³⁾.

Теорема 2 этой работы дает ответ для случая $\tau = \aleph_0$.

В теореме 3 даются условия, при которых одно абсолютное τ — A -множество можно непрерывно отобразить на другое.

Доказательство этих теорем опирается на теорему 1, которая для сепарабельных метрических пространств была доказана В. Гуревичем ⁽⁴⁾.

2. Напомним основные понятия (см. также ⁽⁴⁾). Пространством Бэра $B(\tau)$, где τ — бесконечный кардинал, называется произведение счетного числа дискретных пространств мощности τ . Множество Y называется

τ — A -множеством в пространстве X , если $Y = \bigcup_{z \in B(\tau)} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{m_1 \dots m_k}$, где

$A_{m_1 \dots m_k}$ — замкнутые подмножества пространства X и $z = (m_1, \dots, m_k, \dots)$ — произвольная точка из $B(\tau)$. $\aleph_0$ — A -множества получаются при помощи A -операции, примененной к замкнутым подмножествам пространства X и называются A -множествами.

В случае метрических пространств множество Y называется абсолютным τ — A -множеством (абсолютным борелевским множеством), если Y является τ — A -множеством (борелевским множеством) во всяком метрическом пространстве X , в котором Y топологически содержится. τ — CA -множеством называется множество, дополнительное к τ — A -множеству. Пространство X называется σ -компактным, σ -локально-компактным, если X является объединением счетного числа подпространств, каждое из которых соответственно компактно, локально-компактно.

Через $w(X)$ обозначается вес пространства X . Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется почти-открытым ^(5, 6), если для любой точки $y \in Y$ найдется точка $x \in f^{-1}(y)$, обладающая базой из открытых множеств, образ каждого элемента которой открыт в Y^* .

3. Теорема 1. Пусть X наследственно паракомпактное с первой аксиомой счетности пространство, в котором каждое открытое множество есть объединение τ замкнутых в X множеств.

Тогда если Z есть τ — CA -множество в X и всякое непустое совершенное $**$ в Z множество несчетно, то Z является пересечением τ открытых в X множеств.

Следствие. Пусть X метрическое пространство или подпространство совершенно нормального бикompакта.

* Все пространства предполагаются хаусдорфовыми, а отображения непрерывными и «на».

** Множество Q называется совершенным в Z , если оно замкнуто в Z и плотно в себе.

Тогда, если Z есть CA -множество (в частности борелевское) в X и всякое непустое совершенное в Z множество несчетно, то Z является G_δ -множеством в X .

3.1. Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся две леммы. В первой из них запись $Y \equiv F^\tau(\text{rel } Z)$ означает, что $Y = \bigcup \{F^t : t \in T\}$, где $|T| = \tau \geq \aleph_0$ и $[F^t]_X \cap Z = \emptyset$ для всех $t \in T$ (Y и Z — подмножества пространства X). Соответственно, запись $Y \not\equiv F^\tau(\text{rel } Z)$ означает, что такое представление множества Y невозможно. Очевидно, свойство множества быть $F^\tau(\text{rel } Z)$ наследственно.

Основная лемма 1. Пусть X — наследственно паракомпактное пространство, $Y, Z \subset X$, $Y \cap Z = \emptyset$ и $Y \not\equiv F^\tau(\text{rel } Z)$.

Тогда существует точка $p \in Z$ такая, что для любой ее окрестности $U(p)$ выполняется условие $U(p) \cap Y \not\equiv F^\tau(\text{rel } Z)$.

Следствие 1. Пусть X — наследственно паракомпактное пространство, $Y, Z \subset X$, $Y \cap Z = \emptyset$ и O — открытое подмножество X , являющееся объединением τ замкнутых в X множеств.

Тогда если $O \cap Y \not\equiv F^\tau(\text{rel } Z)$, то существует точка $p \in O \cap Z$ такая, что для любой ее окрестности $U(p)$ выполняется условие $U(p) \cap Y \not\equiv F^\tau(\text{rel } Z)$.

Доказательство. Легко видеть, что справедливо следующее утверждение: если открытое подмножество пространства X есть объединение τ замкнутых в X множеств, $Y, Z \subset X$, $Y \cap Z = \emptyset$ и $O \cap Y \equiv F^\tau(\text{rel } O \cap Z)$, то $O \cap Y \equiv F^\tau(\text{rel } Z)$.

Докажем теперь утверждение следствия. Так как $O \cap Y \not\equiv F^\tau(\text{rel } Z)$, то $O \cap Y \not\equiv F^\tau(\text{rel } O \cap Z)$. По лемме 1 существует точка $p \in O \cap Z$ такая, что для любой ее окрестности $U(p)$ выполняется условие $U(p) \cap (O \cap Y) \not\equiv F^\tau(\text{rel } O \cap Z)$ и, значит, условие $U(p) \cap (O \cap Y) \not\equiv F^\tau(\text{rel } Z)$. А так как свойство быть $F^\tau(\text{rel } Z)$ наследственно, то $U(p) \cap Y \not\equiv F^\tau(\text{rel } Z)$.

3.2. Если в точке p пространства X выполнена первая аксиома счетности, то обозначим через $U^n(p)$ базу открытых множеств в точке p , причем всегда считается $U^n(p) \supset U^{n+1}(p)$, $n = 1, 2, \dots$

Назовем счетное множество $H = \{p_0, p_{0n_1 \dots n_k} : n_1, \dots, n_k, k = 1, 2, \dots\}$ стандартным, если в каждой точке $p_{0n_1 \dots n_k}$ существует база $U^n(p_{0n_1 \dots n_k})$ такая, что выполняются условия:

- a) $U^1(p_{0n_1 \dots n_k}) \subset U^{n_k}(p_{0n_1 \dots n_{k-1}})$,
- b) $U^1(p_{0n_1 \dots n_k}) \cap U^{n_k+1}(p_{0n_1 \dots n_{k-1}}) = \emptyset$.

Очевидно, стандартное множество плотно в себе. Следующая лемма характеризует основное свойство стандартного множества H .

Лемма 2. Пусть H стандартное множество в пространстве X , тогда если в точке $q \in [H]_X \setminus H$ выполнена первая аксиома счетности, то найдутся числа $n_s^0, s = 1, 2, \dots$, и последовательность точек $q_s = p_{n_1^0 \dots n_{s-1}^0 n_{s+1}^0 \dots n_k^0} \in H$, которая сходится к точке q .

3.3. Доказательство теоремы 1. Множество $Y_0 = X \setminus Z$ есть τ - A -множество в пространстве X . Множество точек $z = (m_1, \dots, m_k, \dots) \in B(\tau)$, у которых первые l координат совпадают и равны соответственно $n_1, \dots, n_l$ обозначим $B_{n_1 \dots n_l}(\tau)$. Положим $Y_{0n_1 \dots n_l} = \bigcup_{z \in B_{n_1 \dots n_l}(\tau)} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{m_1 \dots m_k}$, где $z \in B_{n_1 \dots n_l}(\tau)$. Тогда

$$Y_{0n_1 \dots n_l} = \bigcup \{Y_{0n_1 \dots n_l i} : i \in T\}; \quad (1)$$

$$Y_{0n_1 \dots n_l} \subset A_{n_1 \dots n_l}. \quad (2)$$

Предположим, что множество Z не является пересечением τ экземпляров открытых в X множеств, тогда $Y_0 \not\equiv F^\tau(\text{rel } Z)$.

Построим стандартное множество $H \subset Z$, для точек которого будет выполняться условие

$$U^n(p_{0n_1 \dots n_{k-1}}) \cap Y_{0i_{n_1} \dots i_{n_{k-1}}} \neq F^\tau(\text{rel } Z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (*)$$

На первом шаге построения заметим, что по лемме 1 найдется точка $p_0 \in Z$ и база в ней $U^n(p_0)$ такие, что

$$U^n(p_0) \cap Y_0 \neq F^\tau(\text{rel } Z).$$

Предположим, что мы уже нашли точку $p_{0n_1 \dots n_{k-1}}$ и базу в ней $U^n(p_{0n_1 \dots n_{k-1}})$, для которых выполняется условие (*). По условию (1)

$$U^n(p_{0n_1 \dots n_{k-1}}) \cap Y_{0i_{n_1} \dots i_{n_{k-1}}} = \bigcup \{U^n(p_{0n_1 \dots n_{k-1}}) \cap Y_{0i_{n_1} \dots i_{n_{k-1}}} : i \in T\}.$$

Так как $|T| = \tau$, то для каждого номера n найдется множество $Y_{0i_{n_1} \dots i_{n_{k-1}}} i_n$ такое, что

$$U^n(p_{0n_1 \dots n_{k-1}}) \cap Y_{0i_{n_1} \dots i_{n_{k-1}}} i_n \neq F^\tau(\text{rel } Z).$$

Обозначим $V^n(p_{0n_1 \dots n_{k-1}}) = U^n(p_{0n_1 \dots n_{k-1}}) \setminus p_{0n_1 \dots n_{k-1}}$, тогда

$$V^n(p_{0n_1 \dots n_{k-1}}) \cap Y_{0i_{n_1} \dots i_{n_{k-1}}} i_n \neq F^\tau(\text{rel } Z).$$

Согласно следствию 1, для каждого номера n найдется точка

$$p_{0n_1 \dots n_{k-1} n} \in V^n(p_{0n_1 \dots n_{k-1}}) \cap Z$$

такая, что для любой ее окрестности $U(p_{0n_1 \dots n_{k-1} n})$ выполняется условие

$$U(p_{0n_1 \dots n_{k-1} n}) \cap Y_{0i_{n_1} \dots i_{n_{k-1}}} i_n \neq F^\tau(\text{rel } Z).$$

Легко видеть, что среди множества номеров $n=1, 2, \dots$ можно выбрать такое бесконечное подмножество номеров n_k , $k=1, 2, \dots$, и в точках $p_{0n_1 \dots n_{k-1} n_k}$ выбрать такие базы $U^n(p_{0n_1 \dots n_{k-1} n_k})$, чтобы выполнялись условия а) и б). Очевидно, что $U^n(p_{0n_1 \dots n_{k-1} n_k}) \cap Y_{0i_{n_1} \dots i_{n_{k-1}}} i_{n_k} \neq F^\tau(\text{rel } Z)$.

Таким образом мы построили стандартное множество H точек $p_0, p_{0n_1}, \dots, p_{0n_1 \dots n_k}$, принадлежащих Z , для которых выполняется условие (*). Докажем, что $[H]_X \setminus H \subset Y_0$.

Пусть точка $q \in [H]_X \setminus H$. По лемме 2 существует последовательность точек $q_s = p_{0n_1^s \dots n_{k-1}^s n_{k+1}^s \dots n_k} \in H$, которая сходится к точке q . Из условий (*) и (1) следует, что для всех $l \geq s$ $q_l \in [Y_{0i_{n_1^s} \dots i_{n_k^s}}]_X$, следовательно

$$q \in [Y_{0i_{n_1^s} \dots i_{n_k^s}}]_X, \quad s=1, 2, \dots$$

Так как $A_{n_1 \dots n_k}$ — замкнутые подмножества в пространстве X , то из условия (2) следует, что

$$[Y_{0i_{n_1^s} \dots i_{n_k^s}}]_X \subset A_{i_{n_1^s} \dots i_{n_k^s}}.$$

Таким образом, $q \in \bigcap_{s=1}^{\infty} A_{i_{n_1^s} \dots i_{n_k^s}} \subset Y_0$. Теорема 1 доказана.

4. Лемма 3. Если Q — непустое плотное в себе подмножество полного метрического пространства X , то существует такое стандартное множество $H \subset Q$, что множество $P = [H]_X \setminus H$ гомеоморфно пространству Бэра $B(\aleph_0)$.

Доказательство этой леммы можно найти в работе (4).

Теорема 2. Абсолютное A -множество Y содержит замкнутое подпространство, гомеоморфное пространству Бэра $B(\aleph_0)$, если и только если Y не σ -локально-компактно.

Доказательство. Предположим, что абсолютное A -множество Y не σ -локально-компактно. Класс метризуемых σ -локально-компактных

пространств совпадает с классом абсолютных F_σ -множеств (⁷). Поэтому множество Y содержится в некотором метрическом пространстве X таким, что Y не является в нем F_σ -множеством. Рассмотрим пространство BX -полное пространство X , тогда Y , очевидно, не будет F_σ -множеством в BX .

По следствию из теоремы 1, множество $Z = BX \setminus Y$ содержит счетное совершенное подмножество Q , а по лемме 3, Q содержит стандартное подмножество H такое, что $[H]_{BX} \setminus H = P$, где P гомеоморфно $B(\aleph_0)$. Очевидно, что $P \cap Y = P \setminus Q$ и $P \cap Y$ — замкнутое подмножество в Y .

Как известно (^{1, 8}), пространство X гомеоморфно $B(\aleph_0)$, если и только если X есть сепарабельное метрическое нульмерное абсолютное G_δ -множество, не содержащее открытых компактных подмножеств.

Легко проверить, что множество $P \setminus Q$ удовлетворяет всем этим требованиям, так как P гомеоморфно $B(\aleph_0)$ и Q — счетное множество. Этим доказательство достаточности заканчивается. Обратно, если пространство Y содержит замкнутое подпространство $B(\aleph_0)$ и σ -локально-компактно, то тогда $B(\aleph_0)$ σ -локально-компактно, а следовательно, и σ -компактно, что невозможно по теореме Бэра. Теорема доказана.

5. Лемма 4. Пусть F — непустое замкнутое подмножество метрического пространства X , $\dim X = 0$.

Тогда существует почти-открытое отображение $f: X \rightarrow F$.

Следствие 2. Если X, Y абсолютные A -множества, $w(Y) = \aleph_0$, $\dim X = 0$, и пространство X не σ -локально-компактно, то существует почти-открытое отображение $f: X \rightarrow Y$.

Доказательство. По теореме 2 и лемме 4 существует почти-открытое отображение $g: X \rightarrow B(\aleph_0)$. Из доказательства теоремы 1 статьи (¹⁰) следует, что для любого абсолютного τ - A -множества Y , $w(Y) \leq \tau$ существует непрерывное отображение $\varphi: B(\tau) \rightarrow Y$, причем для любой точки $y \in Y$ найдется точка $x \in \varphi^{-1}(y)$ такая, что если U — открытое множество в $B(\tau)$, $x \in U$, то $y \in \text{Int } \varphi(U)$. Отображение $f = \varphi \cdot g: X \rightarrow Y$ будет искомым.

В. Серпинский (¹¹) доказал, что если два нульмерных сепарабельных абсолютных A -множества не σ -компактны, то каждое из них является непрерывным образом другого. Из следствия 2 видно, что каждое из них является даже почти-открытым образом другого.

Из теоремы 2 и одного результата М. Чобана ((³), следствие 11.3) получается следующая

Теорема 3. (GCH). Пусть X, Y — абсолютные τ - A -множества, $\dim X = 0$ и $w(Y) \leq \tau$.

Тогда если $\tau > \aleph_0$ и пространство X не τ -дискретно или если $\tau = \aleph_0$ и пространство X не σ -локально-компактно, то существует почти-открытое отображение $f: X \rightarrow Y$.

Автор приносит благодарность А. Г. Елькину, сделавшему ряд важных замечаний к этой работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
23 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. H. Stone, Rozprawy Matem., v. 28 (1962). ² A. H. Stone, General Top. and its Appl., v. 2, № 3, 249 (1972). ³ М. М. Чобан, Тр. Московск. матем. общ., т. 30, 23, 1974. ⁴ W. Hurewicz, Fund. Math., v. 12 (1928). ⁵ А. В. Архангельский, Тр. Московск. матем. общ., т. 15, 1966. ⁶ П. Вopenка, Чехослов. матем. журн., т. 8, 319 (1958). ⁷ A. H. Stone, Proc. Am. Math. Soc., v. 13, № 4, 495 (1962). ⁸ П. С. Александров, П. С. Урысон, В кн.: П. С. Урысон, Тр. по топологии и другим областям математики, т. 2, М.—Л., Гостехиздат, 1951. ⁹ П. С. Александров, Б. А. Пасынков, Введение в теорию размерности, М., 1973. ¹⁰ E. Michael, A. Stone, Pacif. J. Math., v. 28, № 3, 629 (1969). ¹¹ W. Sierpinski, Fund. Math., v. 15, 195 (1930).