

УДК 512.865.3

МАТЕМАТИКА

Э. Б. ВИНБЕРГ

# О КЛАССИФИКАЦИИ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ГРАДУИРОВАННЫХ АЛГЕБР ЛИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 VII 1975)

В предыдущей заметке автора <sup>(2)</sup> рассматривались линейные группы, ассоциированные с градуированными редуktивными алгебрами Ли; в дальнейшем будем называть их  $\theta$ -группами. Частными случаями  $\theta$ -групп являются присоединенная группа полупростой алгебры Ли и группа изотропии полупростого симметрического пространства. При изучении действия  $\theta$ -групп важную роль играет классификация нильпотентных элементов, аналогичных нуль-формам Гильберта <sup>(2)</sup>. Для присоединенных групп эта классификация получена Е. Б. Дынкиным <sup>(1)</sup>. В настоящей заметке излагается метод классификации нильпотентных элементов, применимый к любой  $\theta$ -группе. Этот метод по существу является обобщением и усовершенствованием метода Дынкина. Испытательным полигоном для него послужила классификация тривекторов 9-мерного пространства, полученная автором совместно с А. Г. Элашвили при помощи  $\mathbb{Z}_3$ -градуированной алгебры Ли типа  $E_8$ .

Пусть  $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_k - \mathbb{Z}_m$ -градуированная редуktивная алгебра Ли ( $m$  — натуральное число или  $\infty$ ),  $G$  — связанная группа Ли, имеющая  $\mathfrak{g}$  своей алгеброй Ли,  $G_0$  — ее связанная подгруппа, соответствующая подалгебре  $\mathfrak{g}_0$ . Наша цель — классификация нильпотентных элементов пространства  $\mathfrak{g}_k$  относительно действия группы  $G_0$ , индуцированного присоединенным представлением группы  $G$ . (Нетрудно понять, что можно ограничиться случаем, когда  $k=1$ .)

1. Характеристика, сопровождающий тор и носитель. Пусть  $e \in \mathfrak{g}_k$  — нильпотентный элемент. Существуют полупростой элемент  $h \in \mathfrak{g}_0$  и нильпотентный элемент  $f \in \mathfrak{g}_{-k}$ , образующие вместе с  $e$  стандартный базис простой трехмерной подалгебры <sup>(2)</sup>. Элемент  $h$  (определенный с некоторым произволом) назовем характеристикой элемента  $e$ . Из <sup>(2)</sup> следует, что два нильпотентных элемента пространства  $\mathfrak{g}_k$  эквивалентны относительно  $G_0$  тогда и только тогда, когда эквивалентны их характеристики.

Характеристика может быть построена следующим образом. Рассмотрим нормализатор  $\mathfrak{n} = \{x \in \mathfrak{g}_0: [x, e] = ce\}$  и централизатор  $\mathfrak{z} = \{x \in \mathfrak{g}_0: [x, e] = 0\}$  элемента  $e$  в алгебре  $\mathfrak{g}_0$ . Максимальный тор  $\mathfrak{h}$  алгебры  $\mathfrak{n}$  назовем сопровождающим тором элемента  $e$ . Элемент  $h \in \mathfrak{h}$ , ортогональный к  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}$  в смысле инвариантного скалярного умножения в алгебре  $\mathfrak{g}$  и нормированный таким образом, что  $[h, e] = 2e$ , и будет характеристикой элемента  $e$ .

Обозначим через  $\eta$  линейную форму на  $\mathfrak{h}$ , определяемую условием « $[u, e] = \eta(u)e$  для всех  $u \in \mathfrak{h}$ », и рассмотрим следующую  $\mathbb{Z}$ -градуированную подалгебру алгебры  $\mathfrak{g}$ :

$$\bar{\mathfrak{g}} = \bigoplus \bar{\mathfrak{g}}_k, \quad \bar{\mathfrak{g}}_k = \{x \in \bar{\mathfrak{g}}_k \bmod m: [u, x] = k\eta(u)x \quad \forall u \in \mathfrak{h}\}. \quad (1)$$

Алгебра  $\bar{\mathfrak{g}}$  редуktивна, и ее центр совпадает с  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}$ . Ее коммутант  $\mathfrak{s}$ , рассматриваемый как  $\mathbb{Z}$ -градуированная подалгебра алгебры  $\mathfrak{g}$ , назовем носителем элемента  $e$ . Нетрудно видеть, что  $e \in \mathfrak{s}_1$  и централизатор  $e$  в  $\mathfrak{s}_0$

тривиален. Это является сильным ограничением на алгебру  $\mathfrak{g}$ ; мы рассмотрим его в следующем пункте.

2. Локально-плоские градуированные алгебры Ли. Пусть  $\mathfrak{g} = \mathbf{Z}$ -градуированная алгебра Ли. Тогда при  $k \neq 0$  все элементы пространства  $\mathfrak{g}_k$  нильпотентны и образуют конечное число орбит <sup>(2)</sup>. В частности, группа  $G_0$  действует в  $\mathfrak{g}_k$  локально транзитивно, и, значит,  $\dim \mathfrak{g}_0 \geq \dim \mathfrak{g}_k$ . Если  $\dim \mathfrak{g}_0 = \dim \mathfrak{g}_k$ , то  $\mathfrak{g}_l = 0$  для всех  $l$ , не кратных  $k$ .

Будем называть  $\mathbf{Z}$ -градуированную алгебру  $\mathfrak{g}$  локально-плоской, если  $\dim \mathfrak{g}_0 = \dim \mathfrak{g}_1$  или, что то же, стационарная подгруппа  $\Gamma$  точки общего положения пространства  $\mathfrak{g}_1$  конечна. В этом случае алгебра  $\mathfrak{g}$  полупроста и порождается подпространствами  $\mathfrak{g}_0$ ,  $\mathfrak{g}_1$  и  $\mathfrak{g}_{-1}$ . Если в качестве  $G$  взять присоединенную группу алгебры  $\mathfrak{g}$ , то  $G_0$  будет действовать в пространстве  $\mathfrak{g}_1$  эффективно. Будем называть алгебру  $\mathfrak{g}$  плоской, если при таком определении группы  $G$  подгруппа  $\Gamma$  тривиальна.

Если  $\mathfrak{g}$  — локально-плоская градуированная алгебра Ли, то характеристика любого элемента общего положения пространства  $\mathfrak{g}_1$  равна удвоенному элементу  $h_0 \in \mathfrak{g}_0$ , определяющему градуировку алгебры  $\mathfrak{g}$ , в том смысле, что  $\mathfrak{g}_k = \{x \in \mathfrak{g}: [h_0, x] = kx\}$ . Выберем какую-либо картановскую подалгебру  $\mathfrak{t}$  алгебры  $\mathfrak{g}$ , содержащуюся в  $\mathfrak{g}_0$  (она автоматически будет содержать  $h_0$ ), и камеру Вейля в  $\mathfrak{t}$ , содержащую  $h_0$ . Пусть  $\Pi$  — система простых корней алгебры  $\mathfrak{g}$  относительно картановской подалгебры  $\mathfrak{t}$  и выбранной камеры Вейля. Тогда «числовые отметки» элемента  $h_0$ , т. е. числа  $\alpha(h_0)$ ,  $\alpha \in \Pi$ , равны 0 или 1, причем  $\Pi_0 = \{\alpha \in \Pi: \alpha(h_0) = 0\}$  есть система простых корней подалгебры  $\mathfrak{g}_0$ . Пара  $\{\Pi, \Pi_0\}$  однозначно определяет градуированную алгебру  $\mathfrak{g}$ .

Для любой системы простых корней  $\Pi$  пара  $\{\Pi, \emptyset\}$  определяет плоскую градуированную алгебру Ли, которую мы будем называть главной. Элемент общего положения пространства  $\mathfrak{g}_1$  в этом случае есть главный нильпотентный элемент алгебры  $\mathfrak{g}$  <sup>(1)</sup>, а  $G_0$  есть максимальный тор группы  $G$ .

Ниже приводится классификация всех простых локально-плоских градуированных алгебр Ли. (Произвольные локально-плоские градуированные алгебры Ли являются их прямыми суммами.) Отметим, что все плоские, а также все особые локально-плоские градуированные алгебры Ли фактически были найдены Дынкиным <sup>(1)</sup>.

Все локально-плоские градуированные алгебры Ли типа  $A_n$  являются главными.

Локально-плоские градуированные алгебры Ли типов  $B_n$  и  $D_n$  суть алгебры  $B(k_1, \dots, k_p)$  и  $D(k_1, \dots, k_p)$ , которые строятся по любому набору  $\{k_1, \dots, k_p\}$  различных неотрицательных целых чисел следующим образом. Пусть основное пространство классической реализации рассматриваемой алгебры  $\mathfrak{g}$  разложено в сумму ортогональных подпространств размерностей  $2k_1+1, \dots, 2k_p+1$  и  $e \in \mathfrak{g}$  — такой нильпотентный элемент, что каждое из этих подпространств инвариантно и циклично относительно  $e$ . Искомая градуировка определяется половиной характеристики элемента  $e$ .

Локально-плоские градуированные алгебры Ли типа  $C_n$  суть алгебры  $C(k_1, \dots, k_p)$ , которые строятся по любому набору  $\{k_1, \dots, k_p\}$  различных положительных целых чисел аналогичным образом, с той разницей, что основное пространство разлагается в сумму подпространств размерностей  $2k_1, \dots, 2k_p$ .

В этих обозначениях, главными будут алгебры  $B(n)$ ,  $C(n)$ ,  $D(n-1, 0)$ . Группа  $\Gamma$  изоморфна  $\mathbf{Z}_2^{p-1}$ , если  $\mathfrak{g}$  — алгебра типа  $B_n$  или  $C_n$ , и  $\mathbf{Z}_2^{p-2}$ , если  $\mathfrak{g}$  — алгебра типа  $D_n$ . Плоскими, но не главными будут алгебры  $D_n(n-k-1, k)$ , что при  $n-k-1 > k$  соответствует обозначению  $D_n(a_k)$  у Дынкина.

В табл. 1 перечислены все особые локально-плоские градуированные алгебры Ли, отличные от главных. В схеме простых корней алгебры  $\mathfrak{g}$

черными кружками отмечены корни, принадлежащие  $\Pi_0$ . Группа  $\Gamma$  для этих алгебр всегда изоморфна симметрической группе  $S_q$ ; число  $q$  указано в 3, 6 и 9 столбцах таблицы.

3. Отыскание носителей. В предположениях п.1 будем называть  $\mathbf{Z}$ -градуированную подалгебру  $\mathfrak{s}$  алгебры  $\mathfrak{g}$  (предполагается, что  $\mathfrak{s}_k \subset \mathfrak{g}_{k \bmod m}$ ) регулярной, если она нормализуется некоторым максимальным тором подалгебры  $\mathfrak{g}_0$ , и полной, если она максимальна среди регулярных подалгебр того же ранга. Носитель  $\mathfrak{s}$  нильпотентного элемента  $e \in \mathfrak{g}_1$  характеризуется (с точностью до преобразований из  $G_0$ ) тем, что это

Таблица 1

|            |  |   |            |  |   |            |  |   |
|------------|--|---|------------|--|---|------------|--|---|
| $E_6(a_1)$ |  | 1 | $F_4(e_1)$ |  | 2 | $E_8(c_1)$ |  | 2 |
| $E_6(b)$   |  | 2 | $F_4(e_2)$ |  | 2 | $E_8(c_2)$ |  | 3 |
| $E_7(a_1)$ |  | 1 | $F_4(e_3)$ |  | 4 | $E_8(d_1)$ |  | 2 |
| $E_7(a_2)$ |  | 1 | $G_2(f)$   |  | 3 | $E_8(d_2)$ |  | 2 |
| $E_7(b)$   |  | 2 | $E_8(a_1)$ |  | 1 | $E_8(d_3)$ |  | 3 |
| $E_7(c_1)$ |  | 2 | $E_8(a_2)$ |  | 1 | $E_8(d_4)$ |  | 3 |
| $E_7(c_2)$ |  | 3 | $E_8(b)$   |  | 2 | $E_8(d_5)$ |  | 5 |

локально-плоская полная регулярная подалгебра, содержащая элемент  $e$  в качестве элемента общего положения пространства  $\mathfrak{s}_1$ .

Фиксируем некоторый максимальный тор  $\mathfrak{t}$  подалгебры  $\mathfrak{g}_0$  и будем называть нильпотентный элемент  $e \in \mathfrak{g}_1$  стандартным, если некоторый его сопровождающий тор лежит в  $\mathfrak{t}$ . Регулярную  $\mathbf{Z}$ -градуированную подалгебру будем называть стандартной, если она нормализуется тором  $\mathfrak{t}$ . Каждый стандартный нильпотентный элемент пространства  $\mathfrak{g}_1$  обладает единственным стандартным носителем: два стандартных нильпотентных элемента эквивалентны относительно группы  $G_0$  тогда и только тогда, когда их стандартные носители эквивалентны относительно группы Вейля  $W$  алгебры  $\mathfrak{g}_0$  (относительно тора  $\mathfrak{t}$ ). Таким образом, классификация нильпотентных элементов пространства  $\mathfrak{g}_1$  сводится к классификации локально-плоских полных стандартных подалгебр с точностью до преобразований из  $W$ .

Обозначим через  $\Sigma_0$  систему корней алгебры  $\mathfrak{g}_0$  и через  $\Sigma_1$  — систему ее ненулевых весов в пространстве  $\mathfrak{g}_1$ . Пусть  $\mathfrak{s}$  — локально-плоская  $\mathbf{Z}$ -градуированная алгебра Ли, определяемая парой  $\{\Pi, \Pi_0\}$ . Вложение  $\mathfrak{s}$  в  $\mathfrak{g}$  в виде стандартной подалгебры определяется вложением системы  $\Pi$  в систему  $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$ , при котором  $\Pi_0 \subset \Sigma_0$ ,  $\Pi \setminus \Pi_0 \subset \Sigma_1$  (система  $\Sigma$  считается снабженной метрикой, индуцированной инвариантным скалярным умножением в алгебре  $\mathfrak{g}$ ; вложение  $\Pi \subset \Sigma$  должно быть подобием на каждой компоненте системы  $\Pi$ ). Вложения  $\Pi \subset \Sigma$  следует классифицировать с точностью до преобразований из  $W$ ; из них нужно выбрать те, для которых соответствующая регулярная подалгебра полна.

4. Метод мини-носителей. Назовем мини-носителем нильпотентного элемента  $e \in \mathfrak{g}_1$  всякую плоскую регулярную  $\mathbf{Z}$ -градуированную подалгебру  $\mathfrak{s}$ , содержащую  $e$  в качестве элемента общего положения пространства  $\mathfrak{s}_1$ . Всякий (стандартный) нильпотентный элемент пространства  $\mathfrak{g}_1$  обладает (стандартным) мини-носителем, но, вообще говоря, не все мини-носители данного элемента эквивалентны. При использовании мини-носителей не требуется проверки полноты, но зато нужно каким-либо образом (например, путем сравнения характеристик) выяснить, эквивалентны ли нильпотентные элементы, отвечающие различным мини-носителям. Этот метод ближе к оригинальному методу Дынкина.

Таблица 2

| Носитель             | Мини-носители                                                            |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $B(k_1, \dots, k_p)$ | $B(k_{i_1}) + D(k_{i_2}, k_{i_3}) + \dots + D(k_{i_{p-1}}, k_{i_p})$     |
| $C(k_1, \dots, k_p)$ | $C(k_1) + \dots + C(k_p)$                                                |
| $D(k_1, \dots, k_p)$ | $D(k_{i_1}, k_{i_2}) + \dots + D(k_{i_{p-1}}, k_{i_p})$                  |
| $E_6(b)$             | $A_5 + A_1$                                                              |
| $E_7(b)$             | $D_6 + A_1$                                                              |
| $E_7(c_1)$           | $D_6(a_1) + A_1$                                                         |
| $E_7(c_2)$           | $D_6(a_2) + A_1, A_5 + A_2$                                              |
| $E_8(b)$             | $E_7 + A_1$                                                              |
| $E_8(c_1)$           | $E_7(a_1) + A_1$                                                         |
| $E_8(c_2)$           | $E_7(a_2) + A_1, E_6 + A_2$                                              |
| $E_8(d_1)$           | $D_8$                                                                    |
| $E_8(d_2)$           | $D_8(a_1)$                                                               |
| $E_8(d_3)$           | $D_8(a_2), A_8$                                                          |
| $E_8(d_4)$           | $D_8(a_3), E_6(a_1) + A_2$                                               |
| $E_8(d_5)$           | $D_4 + D_4(a_1), D_5(a_1) + A_3, D_6(a_2) + 2A_1, A_5 + A_2 + A_1, 2A_4$ |
| $F_4(e_1)$           | $B_4$                                                                    |
| $F_4(e_2)$           | $C_3 + A_1$                                                              |
| $F_4(e_3)$           | $D_4(a_1), A_3 + A_1, C_2 + 2A_1, 2A_2$                                  |
| $G_2(f)$             | $A_2, 2A_1$                                                              |

Соотношение между мини-носителями и носителями данного нильпотентного элемента  $e \in \mathfrak{g}_1$  следующее. Всякий мини-носитель содержится в единственном носителе; мини-носители, содержащиеся в одном носителе  $\mathfrak{z}$ , эквивалентны в  $\mathfrak{g}$  тогда и только тогда, когда они эквивалентны в  $\mathfrak{z}$ . Если носитель плоский, то он будет единственным содержащимся в нем мини-носителем. В остальных случаях все мини-носители (с точностью до эквивалентности) могут быть найдены, исходя из носителя, при помощи табл. 2 (символ  $L_n$  обозначает главную  $\mathbb{Z}$ -градуированную алгебру Ли типа  $L_n$ ).

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
26 VI 1975

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Е. Б. Дынкин, Матем. сб., т. 30, № 2 (1952).    <sup>2</sup> Э. Б. Винберг, ДАН, т. 221, № 4 (1975).