

О. В. ВИСКОВ

ОПЕРАТОРНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИНОМОВ АППЕЛЯ

(Представлено академиком Ю. В. Прохоровым 17 VII 1975)

1. Пусть $\{p_n(x), n \geq 0\}$ — последовательность полиномов и предположим, что существует формальный степенной ряд

$$\psi(z) = \sum_{n \geq 0} \psi_n z^n, \quad \psi_n \neq 0, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

такой, что справедливо формальное равенство

$$\sum_{n \geq 0} \psi_n p_n(x) z^n = A(z) \psi(xg(z)), \quad (2)$$

где $A(z)$ и $g(z)/z$ — формальные степенные ряды с отличными от нуля свободными членами.

Последовательности полиномов, порождаемые соотношениями вида (2), впервые в достаточной общности были изучены в работах Боаса и Бека (^{1, 2}). По этой причине, следуя терминологии, принятой в (^{1, 2}), будем называть (2) обобщенным представлением Аппеля, а порождаемые им последовательности полиномов — обобщенными последовательностями Аппеля, или, ради краткости, B -последовательностями. Символом $[\psi]$ обозначим класс B -последовательностей, допускающих представление (2) с фиксированным $\psi(z)$. Элементы класса $[\psi]$ будем называть B_ψ -последовательностями. Класс $[\exp]$ был предметом исследований Шеффера (^{3, 4}) и Стеффенсена (^{5, 6}); эти исследования были продолжены в недавних работах (^{7, 8}). Цель настоящей работы — распространение операторного подхода к изучению последовательностей класса $[\exp]$, предложенного в (^{7, 8}), на произвольные B -последовательности.

Ключевым является определение 1. Соотношения (5), (6) и предложение 4 дают различные характеристики полиномов, определяемых обобщенным представлением Аппеля (2) с $A(z)=1$. П.5 посвящен общим B -последовательностям.

2. Пусть $\mathcal{P}$ — кольцо полиномов $p(x)$ одного переменного x над полем $\mathcal{F}$ нулевой характеристики и $\mathcal{L}$ — совокупность линейных отображений $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}$. Естественно, что всякий оператор из $\mathcal{L}$ однозначно определяется своими действиями на произвольный базис $\mathcal{P}$. Пусть $\{\psi_n, n \geq 0\}$ — последовательность элементов из $\mathcal{F}$ такая, что $\psi_0=1, \psi_n \neq 0, n \geq 0$. Для каждого $y \in \mathcal{F}$ определим связанный с этой последовательностью оператор Ψ_y соотношениями

$$\Psi_y x^n = \sum_{m=0}^n \frac{\psi_m \psi_{n-m}}{\psi_n} x^m y^{n-m}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Определение 1. Оператор $T \in \mathcal{L}$ называется ε_ψ -оператором, если при всех $y \in \mathcal{F}$

$$\Psi_y T = T \Psi_y.$$

Определение 2. ε_ψ -оператор Q называется δ_ψ -оператором, если $Qx = \text{const} \neq 0$.

Без труда доказывается, что δ_ψ -оператор Q понижает степень полинома на единицу и $Q1=0$. Примером δ_ψ -оператора может служить оператор « ψ -дифференцирования»

$$\theta_\psi x^n = \psi_{n-1} x^{n-1} / \psi_n, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где положено $\psi_{-1}=0$.

3. Последовательность полиномов $\{p_n(x), n \geq 0\}$ назовем базисной последовательностью, если $p_n(x)$ имеет точную степень n .

Определение 3. Пусть задан δ_ψ -оператор Q . Базисная последовательность $\{p_n(x), n \geq 0\}$ называется (Q, ψ) -базисной, если $p_0(x) \equiv 1$, $p_n(0)=0, n \geq 1$, и

$$Qp_n(x) = \psi_{n-1} p_{n-1}(x) / \psi_n, \quad n=1, 2, \dots \quad (5)$$

Легко видеть, что для любого δ_ψ -оператора существует одна и только одна (Q, ψ) -базисная последовательность.

Справедливо следующее

Предложение 1. Если $\{p_n(x), n \geq 0\} - (Q, \psi)$ -базисная последовательность для некоторого δ_ψ -оператора Q , то для любого $y \in \mathcal{F}$

$$\Psi_y p_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{\psi_m \psi_{n-m}}{\psi_n} p_m(x) p_{n-m}(y), \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Наоборот, если базисная последовательность $\{p_n(x), n \geq 0\}$ удовлетворяет (6), то она является (Q, ψ) -базисной последовательностью для некоторого δ_ψ -оператора Q .

Например, $\{x^n, n \geq 0\}$ есть (θ_ψ, ψ) -базисная последовательность δ_ψ -оператора (4).

4. Для любых $y \in \mathcal{F}$ и $p(x) \in \mathcal{P}$ определим

$$V_y p(x) = p(y) \quad (7)$$

и положим $V = V_0$. Легко проверяется, что

$$V \Psi_y = V_y. \quad (8)$$

Из (8), (5) и предложения 1 вытекает

Предложение 2. Если $\{p_n(x), n \geq 0\} - (Q, \psi)$ -базисная последовательность δ_ψ -оператора Q и T — произвольный ε_ψ -оператор, то

$$T = \sum_{n \geq 0} \psi_n [VTp_n(x)] Q^n.$$

В частности, из предложения 2, соотношений (3) и (4) следует, что

$$\Psi_y = \psi(y \theta_\psi).$$

В свою очередь предложение 2 влечет

Предложение 3. Пусть Ξ — кольцо ε_ψ -операторов, $\mathcal{R}$ — кольцо формальных степенных рядов и Q — фиксированный δ_ψ -оператор. Тогда отображение

$$T = \sum_{n \geq 0} \psi_n t_n Q^n \leftrightarrow t(z) = \sum_{n \geq 0} \psi_n t_n z^n$$

является изоморфизмом Ξ и $\mathcal{R}$.

Следствием последнего утверждения является

Предложение 4. Если $\{p_n(x), n \geq 0\}$ — (Q, ψ) -базисная последовательность δ_ψ -оператора Q , то

$$\sum_{n \geq 0} \psi_n p_n(x) z^n = \psi(x q^{-1}(z)),$$

где $q^{-1}(z)$ — формальный ряд обратный к

$$q(z) = \sum_{n \geq 0} \psi_n [VQx^n] z^n.$$

5. Из предложения 3 видно, что ϵ_ψ -оператор S обратим тогда и только тогда, когда $S1 = \text{const} \neq 0$. Пусть заданы обратимый ϵ_ψ -оператор S и δ_ψ -оператор Q с (Q, ψ) -базисной последовательностью $\{p_n(x), n \geq 0\}$. Рассмотрим базисную последовательность

$$s_n(x) = S^{-1} p_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Поскольку, как это следует из предложения 3, ϵ_ψ -операторы коммутируют между собой, то последовательность (9) удовлетворяет соотношениям

$$s_0(x) = \text{const} \neq 0, \quad Qs_n(x) = \psi_{n-1} s_{n-1}(x) / \psi_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Наоборот, если для некоторой базисной последовательности $\{s_n(x), n \geq 0\}$ и некоторого δ_ψ -оператора Q с (Q, ψ) -базисной последовательностью $\{p_n(x), n \geq 0\}$ выполняются соотношения (10), то имеет место (9).

Определение 4. Базисная последовательность $\{s_n(x), n \geq 0\}$ называется B_ψ -последовательностью, если для некоторого δ_ψ -оператора Q с (Q, ψ) -базисной последовательностью $\{p_n(x), n \geq 0\}$ она удовлетворяет (10).

Имеет место следующий аналог предложения 2:

Предложение 5. Если $\{s_n(x), n \geq 0\}$ — B_ψ -последовательность относительно δ_ψ -оператора Q и обратимого ϵ_ψ -оператора S , то для любого ϵ_ψ -оператора T при всех $y \in \mathcal{F}$ и $p(x) \in \mathcal{P}$

$$T \Psi_y p(x) = \sum_{n \geq 0} \psi_n s_n(y) Q^n S T p(x).$$

В частности, при $T = S^{-1}$ и $y = 0$ из предложения 5 следует, что

$$S^{-1} = \sum_{n \geq 0} \psi_n s_n(0) Q^n. \quad (11)$$

Верно и предложение, обратное к предложению 5:

Предложение 6. Если для некоторых δ_ψ -оператора Q и обратимого ϵ_ψ -оператора S базисная последовательность $\{s_n(x), n \geq 0\}$ удовлетворяет

$$\Psi_y p(x) = \sum_{n \geq 0} \psi_n s_n(y) Q^n S p(x)$$

для любых $y \in \mathcal{F}$ и $p(x) \in \mathcal{P}$, то эта последовательность является B_ψ -последовательностью.

Применение оператора S^{-1} к обеим частям равенства (6) показывает, что B_ψ -последовательность, определяемая (9), при любом $y \in \mathcal{F}$ удовлетворяет

$$\Psi_y s_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{\psi_m \psi_{n-m}}{\psi_n} s_m(x) p_{n-m}(y). \quad (12)$$

Из предложения 6 и соотношения (12) следует

Предложение 7. Последовательность $\{s_n(x), n \geq 0\}$ является B_ψ -последовательностью тогда и только тогда, когда выполняется (12), где $\{p_n(x), n \geq 0\} - (Q, \psi)$ -базисная последовательность некоторого δ_ψ -оператора Q .

Из предложений 2 и 3 вместе с соотношениями (9), (10) и определением 4 вытекает следующее (ср. с (2))

Предложение 8. Последовательность $\{s_n(x), n \geq 0\}$ является B_ψ -последовательностью относительно δ_ψ -оператора $Q=q(\theta_\psi)$ и обратимого ε_ψ -оператора $S=s(\theta_\psi)$ в том и только том случае, если

$$\sum_{n \geq 0} \psi_n s_n(x) z^n = \psi(xq^{-1}(z)) / s(q^{-1}(z)),$$

где q^{-1} — формальный ряд, обратный к q .

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
26 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ R. P. Boas, R. C. Buck, Am. Math. Monthly, v. 63, 626 (1959). ² R. P. Boas, R. C. Buck, Polynomial Expansions of Analytic Functions, Berlin, 1964. ³ I. M. Sheffer, Duke Math. J., v. 5, 3, 590 (1939). ⁴ I. M. Sheffer, Bull. Am. Math. Soc., v. 51, 10, 739 (1945). ⁵ J. F. Steffensen, Acta Math., v. 73, 3-4, 333 (1941). ⁶ J. F. Steffensen, Acta Math., v. 78, 1-4, 291 (1946). ⁷ Graph Theory and its Applications, B. Harris (Ed.), N. Y., 1970, p. 167. ⁸ G.-C. Rota, D. Kahaner, A. Odlyzko, J. Math. Anal. Appl., v. 42, 3, 684 (1973).