

М. П. ФРЕЙДЛИН

ФЛУКТУАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С УСРЕДНЕНИЕМ

(Представлено академиком А. П. Колмогоровым 16 IX 1975)

На n -мерном римановом многообразии S класса C^∞ рассмотрим семейство динамических систем $\dot{x}=b(x, \alpha)$, зависящее от точки α некоторого пространства E как от параметра. Пусть ξ_t — случайный процесс в фазовом пространстве E , $t \geq 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}_t^\varepsilon = b(x_t^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}), \quad x_0^\varepsilon = x \in S, \quad (1)$$

где ε — малый числовой параметр. При некоторых предположениях о регулярности поля $b(x, \alpha)$ и процесса ξ_t , которые мы считаем выполненными, решение уравнения (1) существует и единственно.

Если процесс ξ_t обладает некоторыми свойствами перемешивания, то для x_t^ε справедлив принцип усреднения: для любых $\delta > 0$, $T \in [0, \infty)$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P \{ \rho_{0,T}(x^\varepsilon, \bar{x}) > \delta \} = 0, \quad (2)$$

где $\bar{x}_t$ — траектория динамической системы

$$\dot{\bar{x}} = \bar{b}(\bar{x}), \quad (3)$$

получающейся из (1) путем усреднения; $\bar{b}(x) = \int_E b(x, \alpha) m(d\alpha)$. Здесь

$m(d\alpha)$ — инвариантная мера процесса ξ_t ; $\rho_{0,T}(\varphi, \psi) = \sup_{0 \leq s \leq T} \rho(\varphi_s, \psi_s)$, где $\rho(\cdot, \cdot)$ — риманова метрика на S , φ и ψ — элементы пространства $C_{0T}(S)$ непрерывных функций на $[0, T]$ со значениями в S . Например, соотношение (2) выполняется, если ξ_t — регулярный стационарный процесс, эргодический марковский процесс или динамическая система с достаточно хорошими свойствами перемешивания. Для некоторых классов процессов можно вычислить предельное распределение $\varepsilon^{-1/2} \cdot (x_t^\varepsilon - \bar{x}_t)$. Однако такое приближение не позволяет судить о событиях, определяемых поведением процесса x_t^ε на больших, растущих вместе с ε^{-1} интервалах времени: о переходах x_t^ε из окрестности одного устойчивого равновесия системы (3) в другие, о распределении времени, необходимого для такого перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$, о поведении с уменьшением ε инвариантных мер процесса x_t^ε . Разложение x_t^ε по степеням ε не дает возможности хорошо оценивать вероятности событий, относящихся к поведению x_t^ε на конечном отрезке времени, если эти вероятности очень малы. Рассмотрению подобных задач и посвящена эта заметка.

В дальнейшем мы предполагаем, что скорость движения вдоль поля $b(x, \alpha)$ ограничена равномерно по $x \in S$, $\alpha \in E$. Вместо этого можно было бы предположить ограниченность некоторых экспоненциальных моментов скорости перемещения вдоль поля $b(x, \xi_t)$.

Будем говорить, что выполнено условие $\mathcal{F}$, если найдется такая функция $H(z, \beta)$, $z \in R^n$, что для произвольных ступенчатых функций $z_s: [0, T] \rightarrow S$, $\beta_s: [0, T] \rightarrow R^n$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln M \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T (\beta_s, b(z_s, \xi_{s/\varepsilon})) ds \right\} = \int_0^T H(z_s, \beta_s) ds. \quad (4)$$

Из (4) вытекает соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln M \exp \left\{ \int_0^T (\beta, b(z, \xi_s)) ds \right\} = H(z, \beta) \quad (5)$$

для $z \in S$, $\beta \in R^n$, из которого следует, что $H(z, \beta)$ непрерывна на $S \times R^n$ и выпукла вниз по β . Если процесс ξ_t обладает достаточно хорошим перемешиванием, то из (5) следует (4). Например, если ξ_t — марковский и соотношение (4) выполняется равномерно по начальной точке $\xi_0 = \alpha \in E$ и по z из любого компакта $F \subset S$, то условие $\mathcal{F}$ выполняется.

Определим функцию $L(z, \lambda)$ как преобразование Лежандра от $H(z, \beta)$ по параметру β :

$$L(z, \lambda) = \sup_{\beta} [(\lambda, \beta) - H(z, \beta)].$$

Функция $L(z, \lambda)$ выпукла вниз по λ , она принимает неотрицательные значения, включая $+\infty$. Там, где $L(z, \lambda) < \infty$, эта функция непрерывна.

На пространстве $C_{0T}(S)$ рассмотрим функционал

$$S_{0,T}(\varphi) = \int_0^T L(\varphi_s, \dot{\varphi}_s) ds;$$

если φ не абсолютно непрерывна, считаем $S_{0,T}(\varphi) = +\infty$. Доказывается, что в пространстве $C_{0T}(S)$ функционал $S_{0,T}(\varphi)$ полунепрерывен снизу и множество $\Phi_a = \{\varphi \in C_{0T}(S); S_{0,T}(\varphi) \leq a\}$ компактно.

Теорема 1. *Предположим, что условие $\mathcal{F}$ выполнено и функция $H(z, \beta)$ дифференцируема по β . Тогда функционал $S_{0T}(\varphi)$ будет функционалом действия для семейства процессов x_t^ε в пространстве $C_{0T}(S)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (1, 2), т. е. для любых $a, \delta, h > 0$ и $\varphi \in C_{0T}(S)$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$*

$$P\{\rho_{0,T}(x^\varepsilon, \varphi) < \delta\} > \exp\{-\varepsilon^{-1}(S_{0T}(\varphi) + h)\}, \quad (6)$$

$$P\{\rho_{0,T}(x^\varepsilon, \Phi_a) > \delta\} < \exp\{-\varepsilon^{-1}(a - h)\}. \quad (7)$$

Для любого множества $A \subset C_{0,T}(S)$

$$-\inf_{\varphi \in A} S_{0,T}(\varphi) \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \ln P\{x^\varepsilon \in A\} \leq \overline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \ln P\{x^\varepsilon \in A\} \leq -\inf_{\varphi \in A} S_{0,T}(\varphi), \quad (8)$$

где A — внутренняя часть множества A .

Для каждого $\delta > 0$ найдется $\alpha > 0$ такое, что

$$P\{\rho_{0,T}(x^\varepsilon, \bar{x}) > \delta\} < \exp\left\{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right\}. \quad (9)$$

Чтобы доказать теорему, сначала следует доказать утверждения, аналогичные (6) и (7) для процесса $\tilde{x}_t^\varepsilon = x + \int_0^t b(\psi_s, \xi_{s/\varepsilon}) ds$, где ψ_s — ступенчатая функция на $[0, T]$. Так как функции $\tilde{x}_t^\varepsilon$ и φ_s , $S_{0,T}(\varphi) \leq a < \infty$, удовлетворяют условию Липшица, то доказательство для $\tilde{x}_t^\varepsilon$ сводится к изучению конечномерного вектора $X^{\varepsilon, \Delta} = (\tilde{x}_{\Delta^\varepsilon}^\varepsilon, x_{2\Delta^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, x_{T^\varepsilon}^\varepsilon)$ при достаточно малом $\Delta > 0$. Из аналогов утверждений (6) и (7) для $\tilde{x}_t^\varepsilon$ следует неравенство (8) с заменой x_t^ε на $\tilde{x}_t^\varepsilon$ и $S_{0,T}(\varphi)$ на $\tilde{S}_{0,T}(\varphi) = \int_0^T L(\psi_s, \dot{\varphi}_s) ds$. Теперь уже нетрудно проверить (6)–(8) для процесса x_t^ε . Неравенство (9) вытекает из (8), если учесть, что функционал полунепрерывен снизу и обращается в ноль только на траекториях усредненной системы (3).

Простейший пример, когда применима эта теорема, получается, если $\xi_t = \eta_i$ при $t \in [i, i+1)$, где $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n, \dots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих общую функцию распределения $F(x)$. В этом примере $H(z, \beta) = \ln \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\beta, b(z, x)\} dF(x)$.

Как следует из теоремы 1, для нахождения главного логарифмического члена $P\{x^\varepsilon \in A\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ нужно отыскать $\inf_{\varphi \in A} S_{0,T}(\varphi)$. Для многих интересных событий эта нижняя грань выражается через функцию $u(t, z) = \inf S_{0,t}(\varphi)$; начальная точка $\varphi_0 = x$ фиксирована. Так как преоб-

$\varphi: \varphi_t = z$

разование Лежандра инволютивно, то уравнение Гамильтона — Якоби для

$u(t, z)$ имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = H(z, \nabla_z u). \quad (10)$$

Если $\hat{\varphi}$ — единственная экстремаль задачи $\min_{\varphi \in A} S_{0, T}(\varphi)$, на которой достигается минимум, то событие A осуществляется «вдоль функции φ_t »: для любого $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P \{ \rho_{0, T}(x^\varepsilon, \hat{\varphi}) < \delta | x^\varepsilon \in A \} = 1.$$

Это утверждение вытекает из (6), (8).

Для марковских и близких к ним случайных процессов можно сформулировать общие условия типа невырожденности и компактности, обеспечивающие выполнение условия $\mathcal{F}$ и дифференцируемость $H(z, \beta)$. Мы не будем стремиться к наибольшей общности и остановимся подробнее на случае, когда ξ_t — марковский процесс с конечным числом состояний.

Теорема 2. Пусть ξ_t — марковский однородный по времени процесс с N состояниями и q_{ij} — производные в нуле от вероятностей перехода $P_{ij}(t)$. Предположим, что все $q_{ij} > 0$. Тогда матрица $\{q_{ij} - \delta_{ij}(b(z, i), \beta)\}_{i=1}^N$ имеет однократное вещественное наибольшее по модулю собственное значение $\lambda = \lambda(z, \beta)$, которое дифференцируемо по β . Условия теоремы 1 в этом случае выполнены и $H(z, \beta) = \lambda(z, \beta)$.

Эта теорема доказывается с помощью теоремы Фробениуса о спектре матриц с положительными элементами (ср. (5)). Дифференцируемость вытекает из однократности наибольшего собственного значения.

Так как $\lambda(z, \beta)$ — корень характеристического многочлена, то функция $u(t, z) = \inf_{\varphi: \varphi_t = z} S_{0, t}(\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\det \left\{ q_{ij} - \delta_{ij} \left[(b(z, i), \nabla_z u(t, z)) - \frac{\partial u}{\partial t} \right] \right\} = 0$$

с естественными дополнительными условиями.

Покажем теперь как с помощью функционала действия можно изучать поведение x_t^ε на больших отрезках времени. Положим $V(x, y) = \inf S(\varphi)$, где нижняя грань берется по функциям φ , ведущим из точки $x \in S$ в $y \in S$. Предположим, что на S можно выделить r компактов $K_1, \dots, K_r$ так, что $V(x, y) = 0$, если x, y — точки одного компакта, $V(x, y) \neq 0$ для точек разных компактов и при этом ω — предельное множество каждой траектории системы (3) — принадлежат одному из K_i . Обозначим G_i область притяжения компакта K_i , G_i^δ — ее δ -окрестность, $V_{ij} = V(x, y)$ при $x \in K_i, y \in K_j$. Введем в рассмотрение i -графы (3): i -графом над множеством $L = \{1, 2, \dots, r\}$ называется такая система направленных отрезков ($m \rightarrow n$), соединяющих некоторые из точек $m, n \in L$, что из каждой точки, за исключением i , выходит ровно один отрезок и эти отрезки не образуют замкнутых путей. Пусть $\Gamma_i(L)$ — множество всех i -графов над L .

Теорема 3. Предположим, что условия теоремы 2 выполнены, $\delta < \min_{i, j} \rho(K_i, K_j)$. Пусть $B \subset L$. Обозначим B' множество, получающееся из B добавлением элемента δ . Положим $V_{i\delta} = \min_{j \notin B} V_{ij}$ и предположим, что этот минимум достигается только в одной точке $j_B(i) \notin B$. Пусть γ^* — единственный δ -граф, для которого $\min_{\gamma \in \Gamma_\delta(B')} \sum_{(m \rightarrow n) \in \gamma} V_{mn} = \sum_{(m \rightarrow n) \in \gamma^*} V_{mn} < \infty$. Тогда с ве-

роятностью, стремящейся к 1 при $\sigma \rightarrow 0$, траектория $x_t^\varepsilon, x_0^\varepsilon = x \in G_i, i \in B$, после первого выхода из $\bigcup_{i \in B} G_i^\delta$ попадает в область притяжения компакта K_j с номером $j = j_B(k)$, где k таково, что отрезок ($k \rightarrow \delta$) является последним в пути, ведущем из i в точку δ в δ -графе γ^* .

В частности, если B состоит из одной точки i , то переход из G_i происходит в окрестность компакта K_j такого, что $V_{ij} = \min_{l: l \neq i} V_{il}$. Время $\tau_i^\varepsilon(\omega)$ этого

перехода таково, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \ln M \tau_i^\varepsilon = V_{ij}, \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P \{e^{(1/\varepsilon)(V_{ij}-\alpha)} < \tau_i^\varepsilon < e^{(1/\varepsilon)(V_{ij}+\alpha)}\} = 1$$

для любого $\alpha > 0$.

Из этой теоремы следует, что с подавляющей при малых ε вероятностью переходы между K_i разбиваются на циклы. За время, существенно большее, чем время, необходимое для переходов между отдельными K_i , происходят переходы между циклами. Эти переходы между циклами образуют циклы второго ранга и так далее, пока не исчерпаются все возможные переходы или траектория не попадет в поглощающее состояние. Доказательство теоремы 3 использует рассуждения, близкие к (3).

Если ξ_t — диффузионный процесс, то изложенные здесь результаты можно сформулировать на языке дифференциальных уравнений с малым параметром. Рассмотрим, например, задачу

$$\frac{\partial v_\varepsilon(t, x, y)}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^n b^i(x, y) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y^i}, \quad t > 0, \quad x \in [-1, 1], \quad y \in R^n;$$

$$\left. \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} \right|_{x=\pm 1} = 0, \quad v_\varepsilon(0, x, y) = f(x, y).$$

Обозначим $\lambda = \lambda(y, \beta)$ наибольшее собственное значение краевой задачи

$$g''(x) + \left(\sum_{i=1}^n b^i(x, y) \beta_i \right) g(x) = \lambda g(x), \quad g'(-1) = g'(1) = 0;$$

$$u(t, y) = \min_{\varphi \in H_t(z, y)} \int_0^t \Lambda(\varphi_s, \dot{\varphi}_s) ds,$$

где

$$H_t(z, y) = \{\varphi \in C_{0,t}(S) : \varphi_0 = z, \varphi_t = y\},$$

$\Lambda(y, \mu)$ — преобразование Лежандра $\lambda(y, \beta)$ по β .

Теорема 4. *Предположим, что $f(x, y)$ — финитная непрерывная функция, $\bar{f}(y) = 1/2 \int_{-1}^1 f(x, y) dx \geq 0$ и $Q = \text{supp } \bar{f}(y)$. Тогда $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \ln v_\varepsilon(t, x, z) = \min u(t, y)$.*

В заключение заметим, что приведенные здесь результаты применимы в случае, когда ξ_t есть У-поток (см. (4)) на римановом многообразии E , имеющий гладкую инвариантную меру $m(d\alpha)$.

$$H(z, \beta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \int_E \exp \left\{ \int_0^T (\beta, b(z, \xi_s^\alpha)) ds \right\} m(d\alpha)$$

для гладких $b(z, \alpha)$ на $S \times E$ вытекает из (5); ξ_s^α здесь траектория потока, проходящая в момент $s=0$ через точку $\alpha \in E$. Выполнение условия F вытекает из (5).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
4 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

¹ М. И. Фрейдлин, Теория вероятн. и ее примен., т. 17, № 3, 536 (1972). ² А. Д. Венгцель, Теория вероятн. и ее примен., т. 18, № 4, 875 (1973). ³ А. Д. Венгцель, М. И. Фрейдлин, УМН, т. 25, 1. 3 (1970). ⁴ Д. В. Аносов, Я. Г. Синай, УМН, т. 22, 5, 107 (1967). ⁵ Я. Г. Синай, УМН, т. 27, 4, 21 (1972).