

А. Б. ХАРАЗИШВИЛИ

ОБ АБСОЛЮТНО НЕИЗМЕРИМЫХ И АБСОЛЮТНО
ПРЕНЕБРЕЖИМЫХ МНОЖЕСТВАХ В КЛАССАХ
ИНВАРИАНТНЫХ МЕР

(Представлено академиком И. Н. Векун 11 VII 1975)

Термины и обозначения, используемые в данной статье, в основном заимствованы из ⁽¹⁾ и ⁽²⁾.

Пусть E — произвольное множество, G — некоторая группа перестановок E , M — какой-либо класс G -инвариантных мер на E . Будем говорить, что часть Y множества E абсолютно неизмерима в классе M , если не существует меры μ , принадлежащей M , в области определения которой содержится Y .

С точки зрения этого определения классический результат Витали можно сформулировать следующим образом.

Теорема (Витали). *Предположим, что в группу G изометрических преобразований евклидова пространства E_n ($n \geq 1$) входит всюду плотное в E_n множество параллельных переносов $*$, и пусть μ — любая G -мера в E_n , $M_\mu = \mathcal{E}_n$ (μ' — G -мера & μ' продолжает μ).*

Тогда для каждого $X \subset E_n$ с $\mu(X) > 0$ найдется множество $Y \subset X$, абсолютно неизмеримое в классе M_μ .

В частности, беря в качестве μ лебеговскую меру l_n , приходим к существованию частей E_n , абсолютно неизмеримых по отношению к классу всевозможных G -инвариантных продолжений l_n .

Анализируя конструкцию Витали, мы видим, что в этом построении существенную роль играет то обстоятельство, что мера ограниченного подмножества E_n конечна. Следовательно, вообще говоря, нельзя утверждать, что множество Y , фигурирующее в теореме Витали, является абсолютно неизмеримым в классе M_G^σ всех невырожденных (т. е. не равных тождественно нулю) σ -конечных G -инвариантных мер на E_n . Более того, если G — произвольная счетная группа параллельных переносов E_n , то легко показать, что всякую часть Y пространства E_n , получаемую путем выбора по одной точке из классов транзитивности G , можно включить в область определения некоторой меры из M_G^σ .

Остановимся теперь подробнее на аналоге конструкции Витали для группы Π_n ($n \geq 1$) и класса $M_{\Pi_n}^\sigma$ невырожденных σ -конечных Π_n -инвариантных мер на E_n .

Нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Пусть P — любое бесконечное поле, x — какой-нибудь элемент из P , не принадлежащий подполю P , порожденному множеством $\{1\}$. Тогда найдется поле $P' \subset P$ с $\text{Card } P = \text{Card } P'$ такое, что $x \notin P'$.*

Это утверждение немедленно получается применением леммы Цорна или метода трансфинитной индукции.

Лемма 2. *Если справедлива континуум-гипотеза $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, то при $n \geq 2$ существует часть X пространства E_n , удовлетворяющая следующим соотношениям:*

* Здесь для удобства пространство E_n и группа Π_n всех его трансляций отождествляются посредством канонического изоморфизма.

1) некоторая счетная Π_n -конфигурация множества X совпадает с E_n ;
 2) найдется ω_1 -последовательность $(g_\xi)_{\xi < \omega_1}$ трансляций E_n такая, что для каждой пары (ξ, ζ) различных ординальных чисел из промежутка $[0, \omega_1[$ пересечение $g_\xi(X) \cap g_\zeta(X)$ содержится в объединении счетного семейства прямых.

Наметим коротко доказательство сформулированного утверждения. Проведем в E_n ($n \geq 2$) векторную гиперплоскость Γ и дополнительную к ней прямую l . Пусть G_l — аддитивная группа, ассоциированная с l . Поскольку по условию $\text{Card } G_l = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, то G_l представима в виде инъективной ω_1 -последовательности $(g_\xi)_{\xi < \omega_1}$, состоящей из параллельных переносов E_n вдоль l . Обозначим через G_l^ξ подгруппу G_l , системой образующих которой служит частичное семейство $(g_\zeta)_{\zeta \leq \xi}$. Ясно, что $(\forall \xi) (\xi < \omega_1 \Rightarrow \text{Card } G_l^\xi = \aleph_0)$. Возьмем, далее, какую-либо счетную группу G_Γ трансляций E_n , принадлежащих гиперплоскости Γ , и введем обозначение $(K_\xi)_{\xi < \omega_1}$ для инъективного семейства всех классов интранзитивности (относительно Γ) этой группы. Так как для произвольного индекса ξ мощность K_ξ есть $\aleph_0$, то существует биективное отображение $\Phi_\xi: G_l^\xi \rightarrow K_\xi$. Построим с учетом этого множество X_ξ следующим образом. Рассмотрим разбиение прямой l на классы интранзитивности группы G_l^ξ . Выберем некоторую систему Y представителей элементов указанного разбиения. Пусть 0 — точка пересечения Γ с l . Каждому $g \in G_l^\xi$ взаимно однозначно сопоставим множество X_g , получаемое из $g(Y)$ при помощи параллельного переноса E_n на вектор, исходящий из 0 и имеющий своим концом точку $\Phi_\xi(g)$. Положим $X_\xi = \bigcup_{g \in G_l^\xi} X_g$. Легко видеть, что для всякого $h \in G_l$ $K_\xi + h$ содержит в себе

ровно один элемент из X_ξ . Следовательно, если взять $X = \bigcup_{\xi < \omega_1} X_\xi$, то $G_\Gamma(X) = E_n$. Тем самым установлено, что X обладает свойством 1), фигурирующим в формулировке леммы 2. С другой стороны, соотношение $g \in G_l$ влечет существование порядкового числа $\xi < \omega_1$ такого, что $g \in G_l^\xi$. При $\xi \geq \xi$ и g , отличным от тождественного преобразования пространства E_n , будем иметь $X_\xi \cap g(X_\xi) = \emptyset$. Значит, $X \cap g(X) = (\bigcup_{\xi < \xi} X_\xi) \cap g(\bigcup_{\xi < \xi} X_\xi)$, откуда вытекает

справедливость для множества X соотношения 2) нашей леммы.

Предложение 1. Допустим, что выполняется гипотеза континуума $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, и предположим, что размерность n евклидова пространства E_n не меньше единицы.

Тогда найдутся части E_n , абсолютно неизмеримые в классе $M_{\Pi_n}^\sigma$.

В самом деле, если $n \geq 2$, то совершенно ясно, что построенное выше множество X является абсолютно неизмеримым в указанном классе мер. Случай $n = 1$ требует небольшого дополнительного рассмотрения. Отметим, что во многих вопросах теории инвариантных мер удобно мыслить вещественную прямую как векторное пространство над полем рациональных чисел (см. (3, 4)). В данной ситуации нужно будет рассмотреть множество действительных чисел как векторное пространство над несчетным полем, являющимся собственным подполем вещественной прямой (то, что такие поля существуют, гарантируется леммой 1). Поскольку алгебраическая размерность последнего пространства будет не меньше двух, то все рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 2, останутся в силе, чем, в свою очередь, и докажется предложение 1.

Замечание 1. Фактически в лемме 2 содержится более общий результат: если справедлива континуум-гипотеза, то при $n \geq 1$ найдутся подмножества E_n , абсолютно неизмеримые в классе всех тех невырожденных Π_n -инвариантных мер μ , для которых имеет место импликация $((X_i)_{i \in I}$ есть дизъюнктное семейство элементов из области определения μ & $(\forall i) (i \in I \Rightarrow \mu(X_i) > 0)) \Rightarrow (\text{Card } I \leq \aleph_0)$.

Замечание 2. Пусть G — группа движений евклидова пространства E_n , в которую входит несчетное множество параллельных переносов,

а Y — абсолютно неизмеримая в классе M_G^σ часть E_n . Тогда легко показать, что существует такая последовательность $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ преобразований из группы G , что $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} g_k(Y) = E_n$. Поэтому соотношение 1), участвующее в формулировке леммы 2, представляет собой необходимое условие абсолютной неизмеримости множества X по отношению к классу $M_{\Pi_n}^\sigma$.

З а м е ч а н и е 3. Из предложения 1 непосредственно получается следующий результат: всякое $Y \subset E_n$ представимо в виде объединения такого счетного семейства $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ частей E_n , что $(\forall \mu)(\forall k) \quad (k \in \mathbb{N} \ \& \ \mu \text{ — невырожденная } \sigma\text{-конечная } \prod_n\text{-инвариантная мера в } E_n \ \& \ Y_k \text{ } \mu\text{-измеримо} \Rightarrow \mu(Y_k) = 0)$.

Пусть теперь E — произвольное пространство с действующей в нем группой преобразований G , M — некоторый класс G -инвариантных мер на E . Будем говорить, что подмножество Y пространства E абсолютно пренебрежимо в классе M , если для каждой меры μ , принадлежащей M , существует мера μ' , которая также принадлежит M , служит продолжением μ и содержит Y в своей области определения, причем для μ' выполняется равенство $\mu'(Y) = 0$.

Предложение 2. Допустим, что в группу G перестановок множества E входит несчетная подгруппа, действующая свободно в E .

Тогда приводимые ниже утверждения, касающиеся части Y пространства E , эквивалентны между собой:

1. Y является абсолютно пренебрежимым подмножеством E в классе M_G^σ .

2. $(\forall Y') \quad (Y' \text{ есть счетная } G\text{-конфигурация } Y \Rightarrow \text{найдется последовательность } (g_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ преобразований из } G \text{ такая, что } \bigcap_{k \in \mathbb{N}} g_k(Y') = \emptyset)$.

3. $(\forall \mu)(\forall Y') \quad (\mu \in M_G^\sigma \ \& \ Y' \text{ — счетная } G\text{-конфигурация } Y \Rightarrow \text{существует мера } \mu', \text{ принадлежащая } M_G^\sigma, \text{ продолжающая } \mu \text{ и содержащая } Y' \text{ в своей области определения})$.

Для той или иной конкретной меры μ из класса M_G^σ естественным образом возникает вопрос о существовании μ -неизмеримых абсолютно пренебрежимых в M_G^σ частей E . Ответ на этот вопрос во многом зависит от мощности группы G . Например, если $\text{Card } G \leq \aleph_0$, то совершенно ясно, что лишь пустое множество абсолютно пренебрежимо в классе всех невырожденных σ -конечных G -инвариантных мер на E . С другой стороны, если группа G движений евклидова пространства E_n содержит континуальное подмножество, состоящее из параллельных переносов, то с помощью трансфинитной индукции можно построить такую неизмеримую в смысле Лебега часть E_n , любая счетная G -конфигурация которой исчезает посредством четырех трансляций, принадлежащих G (см. (2)). В связи с этим фактом отметим, что имеет место следующий более общий результат.

Предложение 3. Пусть G — группа изометрических преобразований пространства E_n , а μ — σ -конечная G -инвариантная мера на E . Предположим, кроме того, что для G и μ выполняются приводимые ниже условия:

1) в G входит континуальное множество параллельных переносов, не покрываемое никаким счетным семейством аффинных гиперплоскостей в E_n ;

2) топологический вес метрического пространства, ассоциированного с μ , не превосходит $2^{\aleph_0}$;

3) можно указать такое семейство $(Y_i)_{i \in I}$ μ -измеримых частей E_n , что $\text{Card } I \leq 2^{\aleph_0}$, $(\forall i) (i \in I \Rightarrow \mu(Y_i) = 0)$ и $(\forall Z) (Z \subset E_n \ \& \ \mu(Z) = 0 \Rightarrow (\exists i) (i \in I \ \& \ Z \subset Y_i))$.

При этих допущениях найдется μ -массивное подмножество пространства E_n , абсолютно пренебрежимое в классе M_G^σ . Так что, в частности, μ будет строго продолжимой мерой.

З а м е ч а н и е. Из самого определения абсолютно пренебрежимых множеств непосредственно вытекает, что всякое их конечное объединение так-

же является абсолютно пренебрежимым. Если же перейти к их счетным объединениям, то аналогичное свойство уже не будет справедливым (см. (5)).

Следующие два утверждения показывают, что понятие абсолютной пренебрежимости существенно зависит от положенной в его основу группу преобразований G .

Предложение 4. Пусть $n \geq 1$, D_n — группа всех движений эвклидова пространства E_n . Существует множество $X \subset E_n$, удовлетворяющее приводимым ниже соотношениям:

1) $(\forall F) (F \text{ — замкнутая часть } E_n \text{ со строго положительной борелевской мерой} \Rightarrow \text{Card}(F \cap X) = 2^{\aleph_0})$;

2) $(\forall g) (g \in \Pi_n \Rightarrow \text{Card}(g(X) \triangle X) < 2^{\aleph_0})$;

3) X абсолютно пренебрежимо в классе $M_{D_n}^a$.

Предложение 5. Пусть $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ и $n \geq 1$. Существует подмножество X пространства E_n , для которого выполняются соотношения:

1) X абсолютно пренебрежимо в классе $M_{\Pi_n}^a$;

2) некоторая счетная D_n -конфигурация множества X представляет собой l_n -массивную почти D_n -инвариантную часть E_n .

Институт прикладной математики
Тбилисского государственного университета

Поступило
25 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

¹ И. Бурбаки, Теория множеств, М., 1965. ² А. Б. Харазисвили, Сообщ. АН Груз. ССР, т. 75, № 2 (1974). ³ S. Ruziewicz, Fund. Math., v. 26 (1936). ⁴ Г. Хадвигер, Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, М., 1966. ⁵ А. Б. Харазисвили, Сообщ. АН Груз. ССР, т. 75, № 3 (1974).