

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

В. М. ГОВОРОВ

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 4 VII 1975)

Предлагаемые результаты принадлежат к серии работ различных авторов, начатой со статьи В. А. Ильина и Н. М. Круковского (1).

Назовем областью типа Фридмана ограниченную область Q в пространстве $t, x_1, \dots, x_N$, нижнее и верхнее основания которой принадлежат плоскостям $t=0$ и $t=T>0$ соответственно и которая допускает аппроксимацию последовательностью областей $\{Q^n\}$, ограниченных сверху и снизу теми же плоскостями, а сбоку — поверхностями S^n из класса C^2 , нормаль к которым нигде при $0 < t < T$ не параллельна оси $0t$. Под аппроксимацией области Q последовательностью областей $\{Q^n\}$ понимается следующее: 1) $Q^n \subset Q$ (при любом n), 2) для любой области $Q' \Subset Q$ найдется такой номер N , что $Q' \Subset Q^n$ при всех $n \geq N$. Предполагается, что пересечение S^n с боковой поверхностью области Q пусто при любом n .

В области Q задан несамосопряженный оператор $\mathfrak{L}$ с вещественными коэффициентами

$$\mathfrak{L}u = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + \sum_{i=1}^N b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} - a(x, t) \cdot u$$

эллиптического типа, т. е. всюду в Q справедливо

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \xi_i \xi_j, \quad \forall = \text{const} > 0 \quad (1)$$

для любых вещественных $\xi_1, \dots, \xi_N$.

Все коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$ непрерывны и ограничены в области Q :

$$a_{ij}, \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}, b_i, a \in C^0(Q) \cap L_\infty(Q). \quad (2)$$

Введем следующие обозначения: $\Omega_{t_0} = \bar{Q} \cap (t=t_0)$,

$$S = \bigcup_{0 < t < T} \partial \Omega_t, \quad \Omega = \{x: (x, 0) \in \bar{Q} \cap (t=0)\}, \quad \Gamma = \Omega_0 \cup S.$$

Пусть $f(x, t) \in C^0(Q)$, $\varphi(x) \in C^0(\Omega)$, $\varphi|_{\partial \Omega} = 0$. Рассмотрим $u(x, t)$ — классическое решение смешанной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathfrak{L}u = f \quad \text{в } Q; \quad (3)$$

$$u|_S = 0; \quad (4)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Под классическим решением, как обычно, понимается непрерывная в $Q \cup \Gamma$ функция, все производные которой по переменным $x_1, \dots, x_N$ до вто-

рого порядка включительно и первая производная по t непрерывны в Q . Функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (3) в Q . Условия (4) и (5) выполняются по непрерывности.

Т е о р е м а. Пусть Q — область типа Фридмана, коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$ удовлетворяют условиям (1), (2), $j \in L_2(Q)$, u — классическое решение задачи (3), (4), (5).

Тогда $du/\partial x_i \in L_2(Q)$, $1 \leq i \leq N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2) следует, что, в случае необходимости, заменой $u = v \exp(\lambda t)$, $\lambda > 0$, всегда можно добиться выполнения следующего:

$$\Delta = \inf_{(x, t) \in Q} a(x, t) - \frac{1}{4\nu} \sup_{(x, t) \in Q} \sum_{i=1}^N b_i^2(x, t) > 0. \quad (6)$$

Фиксируем какое-либо число $\varepsilon \in (0, T/2)$. Введем следующие обозначения:

$$Q^{\varepsilon} = Q \cap (\varepsilon < t < T - \varepsilon), \quad Q^{n, \varepsilon} = Q^n \cap (\varepsilon < t < T - \varepsilon), \\ S^{n, \varepsilon} = S^n \cap (\varepsilon < t < T - \varepsilon), \quad \Omega^{n, \varepsilon} = \{x: (x, \varepsilon) \in \bar{Q}^n \cap (t = \varepsilon)\}.$$

Построим $\varphi_n(x) \in C_0^\infty(\Omega^{n, \varepsilon})$ таким образом, что

$$0 \leq \varphi_n \leq 1, \\ \varphi_n(x) = 1 \text{ при } \rho(x, \partial\Omega^{n, \varepsilon}) \geq 1/n.$$

Рассмотрим v_n — обобщенное из класса $W_2^{2,1}(Q^{n, \varepsilon})$ решение задачи (см. (4), стр. 14):

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} - \mathfrak{L}v_n = f \text{ в } Q^{n, \varepsilon}, \quad v_n|_{S^{n, \varepsilon}} = 0, \quad v_n(x, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) \cdot \varphi_n(x).$$

Такое решение существует. Действительно, в (2), в частности, показано, что существует решение из $W_2^{2,1}(Q^{n, \varepsilon})$ в том случае, когда $\mathfrak{L}$ есть оператор Лапласа. Затем продолжением по параметру (см. (3), стр. 113) убеждаемся в существовании указанной функции v_n . Для функций v_n справедливо следующее:

Пусть выполнено (6), тогда

$$\int_{Q^{n, \varepsilon}} \left[v_n^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right)^2 \right] dx dt \leq C_1^2 = \\ = C(\Delta, \nu) \cdot \left[\max_{0 \leq t \leq T/2} \int_{\Omega_t} u^2 dx + \int_Q f^2 dx dt \right]; \quad (7)$$

здесь константа $C(\Delta, \nu)$ зависит лишь от Δ и ν и не зависит от n и ε .

Рассмотрим теперь в $Q^{n, \varepsilon}$ функцию $w_n = u - v_n$; w_n является обобщенным из класса $W_2^{2,1}(Q^{n, \varepsilon})$ решением задачи:

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} - \mathfrak{L}w_n = 0 \quad \text{в } Q^{n, \varepsilon},$$

$$w_n|_{S^{n, \varepsilon}} = u|_{S^{n, \varepsilon}},$$

$$w_n(x, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) \cdot [1 - \varphi_n(x)].$$

Для функций w_n справедлив принцип максимума:

$$\forall \text{ и } \max_{(x, t) \in Q^{n, \varepsilon}} |w_n(x, t)| \leq \max_{(x, t) \in S^{n, \varepsilon}} |u(x, t)|, \\ \max_{x \in \Omega^{n, \varepsilon}} |u(x, \varepsilon)| \cdot [1 - \varphi_n(x)]. \quad (8)$$

Доказательство принципа максимума для решений из класса $V_2^{1,0}$ в том случае, когда область является цилиндром, см. ⁽⁴⁾, стр. 220.

Из (8) следует, что, если функции v_n продолжить нулем на $Q^e \setminus Q^{n, \varepsilon}$, то почти всюду в Q^e последовательность v_n равномерно сходится к функции u . Но из (7) следует, что некоторая подпоследовательность последовательности $\{v_n\}$ слабо по метрике $L_2(Q^e)$ сходится к некоторой функции w , для которой справедливо

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial x} \right\|_{L_2(Q^e)} \leq C_1.$$

Из сопоставления этих фактов приходим к выводу, что $u=w$ в Q^e , т. е.

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2(Q^e)} \leq C_1.$$

Так как C_1 не зависит от ε , то

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2(Q)} \leq C_1.$$

Теорема доказана.

Автор благодарит В. А. Ильина за постановку задачи и полезные замечания. Автор признателен также В. П. Михайлову и Е. И. Моисееву за внимание, проявленное к работе.

Московский инженерно-физический институт

Поступило
24 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Ильин, Н. М. Круговский, Дифференциальные уравнения, т. 10, 4 (1974).
² В. П. Михайлов, Матем. сб., т. 62, в. 2 (1963). ³ А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник, УМН, т. 17, 3 (1962). ⁴ О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., «Наука», 1967.