

В. П. ЯНЧЕВСКИЙ

ТЕЛА НАД ГЕНЗЕЛЕВЫМИ ДИСКРЕТНО НОРМИРОВАННЫМИ ПОЛЯМИ И ПРОБЛЕМА ТАННАКА — АРТИНА

(Представлено академиком В. М. Глушковым 25 VIII 1975)

Пусть A — простая конечномерная центральная над k алгебра. $\text{Nrd}_{A/k}: A \rightarrow k$ — отображение приведенной нормы $(^1, ^2)$, $A^{(1)} = (a \in A \mid \text{Nrd}_{A/k}(a) = 1)$, $A' = [A', A']$ — коммутант мультипликативной группы A^* алгебры A . Поскольку ограничение $\text{Nrd}_{A/k}$ на A^* является гомоморфизмом A^* в коммутативную группу k^* , то $A' \cong A^{(1)}$.

Известная проблема Таннака — Артина, поставленная еще в 1943 г. $(^3, ^4)$, состоит в следующем: имеет ли место совпадение групп A' и $A^{(1)}$? Эта проблема связана с более общей гипотезой Кнэзера — Титса $(^5, ^6)$: для простой односвязной k -изотропной алгебраической группы G группа $G_k/C(G_k)$, где $C(G_k)$ — центр G_k , является простой абстрактной группой. Проблема Таннака — Артина непосредственно связана с алгебраической K -теорией. В $(^7)$, стр. 222, она формулируется следующим образом: всегда ли группа $SK_1(A) = A^{(1)}/A'$ тривиальна? Недавно в $(^8)$ проблема Таннака — Артина была отрицательно решена В. П. Платоновым, что повлекло за собой опровержение гипотезы Кнэзера — Титса и отрицательное решение проблемы о тривиальности группы $SK_1(A)$. После отрицательного решения проблемы Таннака — Артина естественно возникла задача вычисления группы $SK_1(A)$. Для решения этой задачи В. П. Платоновым в $(^9)$ была введена группа специальных проективных конорм.

Определение 1. Пусть $L \supset R \supset k$ — башня нормальных расширений поля k , где R — циклическое расширение k , $\{\sigma\} = \text{Gal}(R/k)$. Рассмотрим фактор-группу $R^*/k^*N_{L/R}(L^*)$. Элемент $a^* \in R^*/k^*N_{L/R}(L^*)$ называется специальной проективной конормой, если для его представителя $a \in a^* a\sigma(a)^{-1} \in N_{L/R}(L^*)$. Множество всех специальных проективных конорм образует подгруппу $R^*/k^*N_{L/R}(L^*)$, называемую группой специальных проективных конорм.

Введение этой группы и использование теории полей классов позволило В. П. Платонову в ряде случаев вычислить группу $SK_1(A)$, а также получить интересные результаты по оценке порядков группы $SK_1(A)$ для некоторых алгебр A $(^9)$. Интересные связи с арифметикой, обнаруженные при вычислении $SK_1(A)$ с помощью группы специальных проективных конорм, позволяют надеяться, что последняя группа окажется полезной при решении других вопросов, связанных с теорией полей, алгебраической геометрией и т. д.

Рассматривавшиеся в $(^8, ^9)$ тела являлись телами над полями формальных степенных рядов и некоторыми полями алгебраических функций. В настоящей заметке рассматривается случай тел над гензелевыми дискретно нормированными полями. Аналогично $(^9)$ вводится «некоммутативный» вариант группы специальных проективных конорм, который применяется при доказательстве одной теоремы о группе $SK_1(A)$. Отметим, что в случае тел из $(^8, ^9)$ группа специальных проективных конорм, введенная В. П. Платоновым, и ее «некоммутативный» вариант изоморфны. Обратимся к изложению результатов.

Гензелевым дискретно нормированным полем мы, как обычно, называем дискретно нормированное поле k , для кольца целых $\mathcal{O}_k$ которого вы-

полняется лемма Гензеля: всякий унитарный многочлен $f(x)$ из $\mathfrak{D}_k[x]$, редукция $\overline{f(x)}$ которого в $\overline{k}[x]$ разлагается на два взаимно простых множителя $\tilde{g}(x)$ и $\tilde{r}(x)$, обладает разложением на взаимно простые множители $g(x)$ и $r(x)$ из $\mathfrak{D}_k[x]$, причем редукциями $g(x)$ и $r(x)$ являются соответственно $\tilde{g}(x)$ и $\tilde{r}(x)$. В дальнейшем поле k всегда обозначает гензелево дискретно нормированное поле. Если A — простая конечномерная алгебра с центром k , то по теореме Веддерберна она изоморфна полной матричной алгебре над телом D , центральным над k . Поскольку $SK_1(A) \simeq SK_1(D)$, то в дальнейшем будем считать, что $A=D$.

Через $\mathfrak{D}_D$ и $\mathfrak{p}_D$ будем обозначать соответственно кольцо целых элементов D и максимальный двусторонний идеал $\mathfrak{D}_D$ (о фактах, относящихся к телам над гензелевыми дискретно нормированными полями см. ⁽¹⁰⁾). Пусть Π , π — простые элементы соответственно колец $\mathfrak{D}_D$ и $\mathfrak{D}_k$. Тогда $(\Pi^e) = (\pi)$ для некоторого натурального e , где (Π^e) и (π) — двусторонние идеалы $\mathfrak{D}_D$, порожденные элементами Π^e и π . Число e называется индексом ветвления D над k ; если $e=1$, то тело D называется неразветвленным над k . Обозначим через $\overline{D}$ и $\overline{k}$ тело вычетов D и поле вычетов k . Тело D называется S -телом, если $\overline{D}$ — сепарабельная над $\overline{k}$ алгебра, т. е. центр Z тела $\overline{D}$ является сепарабельным расширением $\overline{k}$. Отображение $\varphi: d \rightarrow \Pi d \Pi^{-1}$ для произвольного $d \in D$ является автоморфизмом D , преобразующим $\mathfrak{D}_D$ и $\mathfrak{p}_D$ в себя. Следовательно, φ индуцирует некоторый автоморфизм $\overline{\varphi}$ тела $\overline{D}$. Поскольку элемент Π определен с точностью до единицы из $\mathfrak{D}_D$, то ограничение σ автоморфизма $\overline{\varphi}$ на Z не зависит от выбора Π . Известно, что Z — циклическое расширение $\overline{k}$ степени e и σ — образующая группы Галуа $Z/\overline{k}$ ⁽¹¹⁾. Рассмотрим «некоммутативный» вариант группы специальных проективных конорм. Ниже D обозначает S -тело.

Определение 2. Рассмотрим группу $R = Z^*/k^* \text{Nrd}(\overline{D}^*)$; элемент $\tilde{a} \in R$ называется специальной проективной конормой, если для его представителя $a \in \tilde{a}$ $a\tau(a)^{-1} \in \text{Nrd}(\overline{D}^*)$, где τ — образующая группы Галуа $\text{Gal}(Z/\overline{k})$. Множество специальных проективных конорм образует подгруппу R , которую мы будем обозначать через $P(D)$ и называть группой специальных проективных конорм.

Как и в «коммутативном» случае, группа $P(D)$ не зависит от выбора образующей τ .

Обозначим через F образ D' в $\overline{D}$ при редукции по модулю $\mathfrak{p}_D$. Пусть $N = (F \cap \overline{D}^{(r)}) / (\overline{D})'$. Тогда справедлива следующая

Теорема. Если D — S -тело, то имеет место точная последовательность $1 \rightarrow SK_1(\overline{D})/N \rightarrow SK_1(D) \rightarrow P(D) \rightarrow 1$.

Во всех последующих формулировках D всегда обозначает S -тело.

Доказательство теоремы основывается на следующих трех предложениях.

Предложение 1. Пусть E — множество всех таких элементов из $\mathfrak{D}_D$, что $a \in E \Rightarrow a \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_D}$. Тогда $E \cap \overline{D}^{(r)} \subset D'$.

Предложение 2. Пусть $a, b \in D^*$. Тогда если $\overline{aba^{-1}b^{-1}}$ — образ $aba^{-1}b^{-1}$ в $\overline{D}$ при редукции по модулю $\mathfrak{p}_D$, то $\text{Nrd}_{\overline{D}/Z}(\overline{aba^{-1}b^{-1}}) = a\sigma(a)^{-1}$, где $\alpha \in \text{Nrd}_{\overline{D}/Z}(\overline{D})$.

Предложение 3. Образ G группы $\overline{D}^{(r)}$ в $\overline{D}$ при редукции по модулю $\mathfrak{p}_D$ совпадает со множеством $(a \in \overline{D} \mid N_{Z/\overline{k}}(\text{Nrd}_{\overline{D}/Z}(a)) = 1)$.

Относительно доказательств этих предложений заметим, что они являются несложными обобщениями соответствующих утверждений из ⁽⁹⁾.

Доказательство теоремы. Покажем вначале, что $P(D) \simeq G/F\overline{D}^{(r)}$, где G, F — образцы $\overline{D}^{(r)}$, D' в $\overline{D}$ при редукции по модулю $\mathfrak{p}_D$. Для этого рассмотрим отображение i группы G в $P(D) \subset Z^*/k^* \text{Nrd}(\overline{D}^*)$, определяемое следующим образом. Пусть $a \in G$. Тогда в силу предложения 3 $N_{Z/\overline{k}}(\text{Nrd}_{\overline{D}/Z}(a)) = 1$ и потому (теорема Гильберта 90) $\text{Nrd}_{\overline{D}/Z}(a) = \alpha\sigma(\alpha)^{-1}$. Положим $i(a) = \alpha k^* \text{Nrd}(\overline{D}^*)$. Если $\text{Nrd}_{\overline{D}/Z}(a) = \beta\sigma(\beta)^{-1}$, то $\beta = \alpha c$, $c \in k^*$, и

потому i определено корректно. В силу предложения 3 i — сюръективное отображение. Нетрудно видеть, что i является гомоморфизмом с ядром $\text{Ker } i = (\bar{d} \in \bar{D} \mid \text{Nrd}(\bar{d}) = \text{Nrd}(x) \sigma(\text{Nrd}(x))^{-1}, x \in \bar{D}^*)$. Из предложения 2 немедленно следует, что $\text{Ker } i = F\bar{D}'$, что и требовалось. В силу предложения 1 $T = E \cap D^{(')} \subset D'$ и кроме того, очевидно, T — нормальный делитель $D^{(')}$ и D' , поэтому $SK_1(D) \simeq (D^{(')}/T)/(D'/T)$. Но $D^{(')}/T \simeq G$, $D'/T \simeq F$, $F \subset G$, следовательно, $SK_1(D) \simeq G/F$. Далее,

$$P(D) \simeq G/F\bar{D}' \simeq (G/F)/(F\bar{D}'/F).$$

Обозначим $F\bar{D}'/F$ через $\bar{N}$ и применим теорему об изоморфизме, тогда получим $\bar{N} \simeq \bar{D}'/(F\bar{D}')$ или $\bar{N} \simeq (\bar{D}'/\bar{D}')/((F\bar{D}')/\bar{D}') = SK_1(\bar{D})/N$. Таким образом, так как $P(D) \simeq (G/F)/\bar{N}$, $\bar{N} \simeq SK_1(\bar{D})/N$, и G/F , как было показано, изоморфна $SK_1(D)$, то теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Как в формулировке теоремы, так и в последующих формулировках требование того, чтобы D было S -телом, заведомо выполнено для произвольного тела, если поле $\bar{k}$ совершенно.

Отметим ряд следствий из теоремы.

С л е д с т в и е 1. Если $SK_1(\bar{D})$ — тривиальная группа, то группы $SK_1(D)$ и $P(D)$ изоморфны.

Доказательство немедленно следует из точной последовательности теоремы.

С л е д с т в и е 2. Если $\bar{D}$ коммутативно, то $SK_1(D)$ — тривиальная группа.

Действительно, в этом случае, как нетрудно видеть, группы $SK_1(\bar{D})$ и $P(D)$ тривиальны и все следует из точной последовательности теоремы. Тем самым, в частности, получена наиболее существенная часть теоремы 2 из (11).

С л е д с т в и е 3. Пусть D не разветвлено над k . Тогда $SK_1(D) \simeq SK_1(\bar{D})$.

Доказательство снова состоит в несложном применении теоремы.

Напомним, что C_2^0 -полем (12) называется такое поле L , что для всякого его конечного расширения M и центрального над M тела B имеем $\text{Nrd}_{B/M}(B) = M$.

С л е д с т в и е 4. Пусть $\bar{k}$ — C_2^0 -поле. Тогда группа $SK_1(D)$ тривиальна.

В (12) показана тривиальность группы $SK_1(\bar{D})$. Нетрудно видеть, что группа $P(D)$ в нашем случае также тривиальна. Остается применить теорему.

Ввиду результатов из (8, 9) группа $SK_1(D)$, вообще говоря, нетривиальна уже в том случае, когда $\bar{k}$ имеет степень трансцендентности, не меньшую 1, над глобальным полем. С другой стороны, если $\bar{k}$ глобально, то из (8) следует, что в случае, когда $\bar{k}$ — полное дискретно нормированное поле, $SK_1(D)$ — тривиальная группа (что, впрочем, справедливо и в случае, когда k гётезелево относительно дискретного нормирования). Таким образом, этот результат вместе со следствием 4, отражающим случай «больших» полей $\bar{k}$, и следствием 1 дает, по-видимому, почти «предельный» случай положительного решения проблемы Таннака — Артина для гётезелевых дискретно нормированных полей.

Автор благодарит В. П. Платонова за проявленное внимание и полезные обсуждения.

Институт математики
Академии наук БССР
Минск

Поступило
19 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Бурбаки, Алгебра: модули, кольца, формы, М., 1966. ² А. Вейль, Основы теории чисел, М., 1972. ³ Т. Nakayama, Y. Matsushima, Proc. Imper. Acad. Japan, v. 19, 21 (1943). ⁴ S. Wang, Am. J. Math., v. 72, № 2, 323 (1950). ⁵ В. П. Платонов, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 33, № 6, 1211 (1969). ⁶ J. Tits, Ann. Math., v. 80, № 2, 313 (1964). ⁷ Х. Басс, Алгебраическая K-теория, М., 1973. ⁸ В. П. Платонов, ДАН, т. 221, № 5, 1038 (1975). ⁹ В. П. Платонов, ДАН, т. 222, № 6 (1975). ¹⁰ O. F. G. Schilling, The Theory of Valuations, N. Y., 1950. ¹¹ В. П. Платонов, В. И. Яичевский, ДАН, т. 221, № 4, 784 (1975). ¹² В. И. Яичевский, ДАН, т. 221, № 5, 1056 (1975).