

УДК 532.517.4

ГИДРОМЕХАНИКА

Н. М. ДМИТРИЕВ, М. В. ЛУРЬЕ

О РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АНИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 9 VII 1975)

Одно из основных допущений, которое принимается для построения реологических моделей турбулентного течения, состоит в предположении о наличии в каждой точке потока связи между тензором рейнольдсовских напряжений $\langle -\rho u_i u_j \rangle$ и тензором скоростей деформаций осредненного течения $e_{ij} = 1/2 (\nabla_i U_j + \nabla_j U_i)$. Как правило, в качестве дополнительного предположения принимается условие, что эта связь носит линейный характер и что при равенстве нулю тензора скоростей деформации осредненного течения девиатор рейнольдсовских напряжений также обращается в нуль.

Буссинеск ⁽¹⁾, который одним из первых предложил модель подобного рода, ввел понятие турбулентной вязкости, считая, что она является скалярной величиной. Однако эксперименты показали, что турбулентная среда по различным направлениям характеризуется различными значениями коэффициента турбулентной вязкости. Поэтому в ряде других работ, например работах А. Н. Колмогорова, А. С. Монина ^(2, 3), для описания связи между рейнольдсовскими напряжениями и скоростями деформации осредненного течения использованы тензоры четвертого ранга, обобщающие понятие турбулентной вязкости. Но и в этом случае реологические модели дают довольно грубое приближение к действительности, так как приводят к дополнительным ограничениям, которые не выполняются в реальных потоках.

Действительно, при сделанных предположениях для несжимаемой жидкости зависимость между тензорами $\langle \rho u_i u_j \rangle$ и e_{ij} имеет вид:

$$\langle \rho u^i u^j \rangle = 2/3 \rho E g^{ij} - \rho A^{ijkl} e_{kl}, \quad (1)$$

где g^{ij} — компоненты метрического тензора, $E = 1/2 \langle u^i u_i \rangle$ — энергия турбулентных пульсаций, A^{ijkl} — тензор четвертого ранга, эффективно характеризующий свойства турбулентной среды. Этот тензор удовлетворяет условиям

$$A^{ijkl} = A^{jkl i} = A^{ij l k}, \quad g_{ij} A^{ijkl} = 0 \quad (2)$$

и может зависеть произвольным образом от инвариантов тензора e_{kl} .

Равенства (1) показывают, что при конечных A^{ijkl} в тех точках турбулентного потока, где компоненты тензора e_{kl} обращаются в нуль, равны между собой диагональные элементы тензора $\langle \rho u^i u^j \rangle$. Такой вывод не согласуется с экспериментальными данными для реальных турбулентных течений: например, на оси плоскопараллельного потока между двумя неподвижными пластинами $e_{kl} = 0$, но $\langle \rho u_1 u_1 \rangle = \langle \rho u_2 u_2 \rangle = \langle \rho u_3 u_3 \rangle$ ⁽⁴⁾. Больше того, несложный анализ реологической модели (1) показывает, что имеется еще ряд несоответствий этой модели с экспериментальными данными. Для того чтобы выявить эти несоответствия, рассмотрим более подробно вопрос о возможной структуре тензора A^{ijkl} . В общем случае нет оснований считать, что турбулентное поле скоростей должно быть изотропным. Поэтому рассмотрим, какой вид может иметь тензор A^{ijkl} для различных случаев анизотропии. При этом естественно ограничиться только группами симметрий типа тектур.

Общий вид тензоров до четвертого ранга включительно для любой группы симметрии приводится в работах ^(5, 6). Для анизотропных тектур, при выполнении условий (2), эти тензоры имеют вид:

а) для текстур класса $m \cdot \infty : m, \infty : 2, \infty \cdot m$

$$A^{ijkl} = k_1(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk} - \frac{2}{3}g^{ij}g^{kl}) + k_2(n^i n^j g^{kl} - \frac{1}{3}g^{ij}g^{kl}) + \\ + k_3(n^i n^j n^k n^l - \frac{1}{3}g^{ij}n^k n^l) + \\ + k_4(g^{ik}n^j n^l + g^{il}n^j n^k + g^{jk}n^i n^l + g^{jl}n^i n^k - \frac{4}{3}g^{ij}n^k n^l), \quad (3)$$

б) для текстур класса $\infty : m$ и $\infty :$

$$A^{ijkl} = A^{ijkl}(m \cdot \infty : m) + k_5(g^{ik}\Omega^{jl} + g^{il}\Omega^{jk} + g^{jl}\Omega^{ik} + g^{jk}\Omega^{il}) + \\ + k_6(n^i n^k \Omega^{jl} + n^j n^k \Omega^{il} + n^j n^i \Omega^{ik} + n^i n^j \Omega^{jk}); \quad (4)$$

здесь n^i — компоненты единичного тензора, характеризующего анизотропию, тензор Ω^{ij} в кристаллографической системе координат равен $E^{ijk}n_k$, где E^{ijk} — тензор Леви — Чивита.

В случае плоскопараллельного потока между двумя неподвижными пластинами отлична от нуля единственная компонента тензора скоростей деформации e_{23} (ось x_3 направлена по потоку). При определении анизотропии этого течения естественно предположить, что вектор направлен по оси потока. Тогда непосредственной проверкой можно убедиться, что для всех рассматриваемых видов симметрии нормальные компоненты тензора рейнольдсовских напряжений равны между собой не только на оси течения, но и в любой другой точке потока.

Для устранения этих несоответствий рассмотрим линейную зависимость между тензорами $\langle \rho u^i u^j \rangle$ и e_{kl} в более общем виде

$$\langle \rho u^i u^j \rangle = \frac{2}{3}\rho E g^{ij} - \rho A^{ij} - \rho A^{ijkl} e_{kl}, \quad (5)$$

где A^{ij} — тензор второго ранга, симметричный по индексам i и j , а также удовлетворяющий условию $g_{ij}A^{ij} = 0$. В случае анизотропных текстур этот тензор имеет вид

$$A^{ij} = k(n^i n^j - \frac{1}{3}g^{ij}).$$

Для рассмотренного выше плоскопараллельного течения несжимаемой жидкости между двумя неподвижными пластинами модель (5) дает

$$\langle \rho u_1 u_1 \rangle = \langle \rho u_2 u_2 \rangle = \frac{2}{3}\rho E + \frac{1}{3}\rho k, \quad \langle \rho u_3 u_3 \rangle = \frac{2}{3}\rho E - \frac{2}{3}\rho k, \quad (6) \\ \langle \rho u_1 u_2 \rangle = \langle \rho u_1 u_3 \rangle = 0, \quad \langle \rho u_2 u_3 \rangle = -2\rho(k_1 + k_2)e_{23}.$$

Сравнение с экспериментальными данными ⁽⁴⁾ показывает, что соотношения (6) в точности выполняются на оси потока и хорошо отражают картину течения вблизи нее. При этом, чем ближе рассматриваемая точка к стенке трубы, тем больше различие между $\langle \rho u_1 u_1 \rangle$ и $\langle \rho u_2 u_2 \rangle$. Следовательно, реологическая модель (5) также налагает дополнительные, хотя и менее жесткие условия. Приведенные аргументы показывают, что связь между рейнольдсовскими напряжениями и скоростями деформаций осредненного течения должна быть нелинейной. Согласно теореме Гамильтона — Кэлли, самый общий вид такой связи может быть представлен равенствами

$$\langle \rho u^i u^j \rangle = \frac{2}{3}\rho E g^{ij} - \rho A^{ij} - \rho A^{ijkl} e_{kl} - \rho A^{ijklmn} e_{kl} e_{mn}; \quad (7)$$

здесь A^{ijklmn} — тензор шестого ранга, удовлетворяющий условиям

$$A^{ijklmn} = A^{jiklmn} = A^{ijkmln} = A^{ijlnkm} = A^{ijmknl}, \quad g_{ij}A^{ijklmn} = 0.$$

Общий вид таких тензоров для всех видов текстур получен в работе ⁽⁷⁾. Эти тензоры имеют довольно громоздкий вид, поэтому приведем сразу окончательную форму соотношений (7). Для текстур класса $\infty : m$ и ∞ они имеют вид

$$\langle \rho u^i u^j \rangle = \frac{2}{3}\rho E g^{ij} - \rho k(n^i n^j - \frac{1}{3}g^{ij}) - 2\rho k_1 g^{ik} g^{jl} e_{kl} - \\ - 2\rho k_2 (g^{ik}n^j + g^{jk}n^i - \frac{2}{3}g^{ij}n^k) n^l e_{kl} - \rho k_3 (n^i n^j - \frac{1}{3}g^{ij}) n^k n^l e_{kl} - \\ - 2\rho k_4 (g^{ik}\Omega^{jl} + g^{jk}\Omega^{il}) e_{kl} - 2\rho k_5 (n^i n^k \Omega^{jl} + n^j n^k \Omega^{il}) e_{kl} - \\ - \rho k_6 (g^{ik}g^{jm} + g^{im}g^{jk} - \frac{2}{3}g^{ij}g^{km}) g^{ln} e_{kl} e_{mn} - \rho k_7 (n^i n^j - \frac{1}{3}g^{ij}) g^{ln} n^k n^m e_{kl} e_{mn} -$$

$$\begin{aligned}
& -\rho k_8 (n^i g^{jk} + n^j g^{ik} - \frac{2}{3} g^{ij} n^k) n^l n^m n^n e_{kl} e_{mn} - \rho k_9 (n^i n^j - \frac{1}{3} g^{ij}) g^{km} g^{ln} e_{kl} e_{mn} - \\
& -\rho k_{10} g^{ik} g^{jl} n^m n^n e_{kl} e_{mn} - \rho k_{11} (g^{in} g^{jl} + g^{jn} g^{il} - \frac{2}{3} g^{ij} g^{ln}) n^k n^m e_{kl} e_{mn} - \\
& -\rho k_{12} (n^i n^j - \frac{1}{3} g^{ij}) n^k n^l n^m n^n e_{kl} e_{mn} - \rho k_{13} (n^i g^{jm} + n^j g^{im} - \frac{2}{3} g^{ij} n^m) g^{ln} n^k e_{kl} e_{mn} - \\
& -\rho k_{14} (\Omega^{ik} g^{jl} + \Omega^{jk} g^{il}) n^m n^n e_{kl} e_{mn} - \rho k_{15} (\Omega^{ik} g^{jn} + \Omega^{jk} g^{in}) n^l n^m e_{kl} e_{mn} - \\
& -\rho k_{16} (\Omega^{ik} g^{jn} + \Omega^{jk} g^{in}) g^{lm} e_{kl} e_{mn}.
\end{aligned} \quad (8)$$

Если положить в этой формуле $k_4 = k_5 = k_{14} = k_{15} = k_{16} = 0$, то получим пелинейную связь между тензорами для текстур классов $m \cdot \infty : m, \infty : 2, \infty \cdot m$. Оставив отличным от нуля в квадратичном члене только выражение при k_6 и положив $k = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 0$, будем иметь случай изотропии.

Анализируя равенства (7), (8), можно убедиться, что в случае изотропии не удастся избежать тех несоответствий модели эксперименту, о которых говорилось выше. Поэтому связь между тензорами $\langle \rho u^i u^j \rangle$ и e_{kl} должна быть не только пелинейной, но и анизотропной.

Для плоскопараллельного турбулентного течения между двумя параллельными пластинами равенства (7), (8) дают следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\langle \rho u_1 u_1 \rangle &= \frac{2}{3} \rho E + \frac{1}{3} \rho k + \frac{1}{3} \rho (4k_6 + k_7 + 2k_9 + 2k_{11} + 2k_{13}) e_{23}^2, \\
\langle \rho u_2 u_2 \rangle &= \frac{2}{3} \rho E + \frac{1}{3} \rho k + \frac{1}{3} \rho (-2k_6 + k_7 + 2k_9 - 4k_{11} + 2k_{13}) e_{23}^2, \\
\langle \rho u_3 u_3 \rangle &= \frac{2}{3} \rho E - \frac{2}{3} \rho k - \frac{1}{3} \rho (2k_6 + 2k_7 + 4k_9 - 2k_{11} + 4k_{13}) e_{23}^2, \\
\langle \rho u_1 u_2 \rangle &= -2\rho (k_{15} + k_{16}) e_{23}^2, \quad \langle \rho u_1 u_3 \rangle = 0, \quad \langle \rho u_2 u_3 \rangle = -2\rho (k_1 + k_2) e_{23}.
\end{aligned} \quad (9)$$

В рамках модели, определяемой соотношениями (9), можно дать качественное объяснение всем экспериментально наблюдаемым фактам при турбулентном течении в плоском канале. На оси канала, где компонента e_{23} равна нулю, из соотношений (9) следует, что компоненты $\langle \rho u_1 u_1 \rangle$ и $\langle \rho u_2 u_2 \rangle$ равны между собой и отличны от $\langle \rho u_3 u_3 \rangle$:

$$\langle \rho u_1 u_1 \rangle = \langle \rho u_2 u_2 \rangle = \frac{2}{3} \rho E + \frac{1}{3} \rho k, \quad \langle \rho u_3 u_3 \rangle = \frac{2}{3} \rho E - \frac{2}{3} \rho k. \quad (10)$$

Этот результат находится в полном согласии с экспериментальными данными⁽⁴⁾. Если положить входящий в формулу (10) коэффициент k равным $-1/2 E$, то получится другой результат:

$$\langle \rho u_1 u_1 \rangle = \langle \rho u_2 u_2 \rangle = \frac{1}{2} \rho E, \quad \langle \rho u_3 u_3 \rangle = \rho E, \quad (11)$$

также известный из наблюдений.

При смещении рассматриваемой точки с оси потока и приближении ее к стенкам канала равенства (11) нарушаются за счет квадратичных относительно тензора скоростей деформации членов, которые дают неодинаковый вклад в нормальные компоненты рейнольдсовских напряжений.

Сравнение с экспериментальными данными выражений для компонент $\langle \rho u_1 u_2 \rangle$ и $\langle \rho u_1 u_3 \rangle$ тензора рейнольдсовских напряжений показывает, что коэффициент $(k_{15} + k_{16})$ должен быть весьма малым, поскольку в пределах точности измерений получается, что $\langle \rho u_1 u_2 \rangle$ тождественно равно нулю во всей области течения. Для касательного напряжения $\langle \rho u_2 u_3 \rangle$ в данном случае получается выражение, по внешнему виду не отличающееся от обычно используемого.

Авторы благодарят акад. Л. И. Седова за внимание к работе.

Московский институт нефтехимической
и газовой промышленности
им. И. М. Губкина
Москва

Поступило
30 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. Boussinesq, Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section, I-II, Paris, 1897. ² А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, сер. физ., т. 6, № 1-2, 56 (1942). ³ А. С. Монин, ДАН, т. 75, № 5, 624 (1950). ⁴ Ж. Конг-Белло, Турбулентное течение в канале с параллельными стенками, М., «Мир», 1968. ⁵ Л. И. Седов, Механика сплошной среды, Изд. 2-е, М., «Наука», 1973. ⁶ В. В. Лохин, Л. И. Седов, ПММ, т. 27, в. 3, 393 (1963). ⁷ М. А. Идлин, ПММ, т. 30, в. 3, 531 (1966).