

УДК 531.383

МЕХАНИКА

В. Ф. ЖУРАВЛЕВ

К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКАХ ЭФФЕКТА МАГНУСА

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 5 XI 1975)

Уравновешенный гироскоп в кардановом подвесе имеет следующие интегралы движения ⁽¹⁾:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} I(\beta) + H \sin \beta &= G, \\ \dot{\alpha}^2 I(\beta) + \beta^2 B_0 &= E,\end{aligned}\tag{1}$$

где G — интеграл момента, E — интеграл энергии, углы α и β определяют положение рамок, H — кинетический момент, $I(\beta)$ и B_0 — моменты инерции.

В дальнейшем движение по углу собственного вращения нас не интересует, поэтому третий интеграл не рассматривается.

Если начальные условия таковы, что $G \leq H$, то система допускает очевидное решение

$$\dot{\alpha}_0 = 0, \quad \sin \beta_0 = G/H.\tag{2}$$

Эффектом Магнуса называется прецессия по углу α , возникающая в результате возмущения этого частного решения. Среднее по времени значение угловой скорости этой прецессии может быть получено из (1) в виде

$$\dot{\alpha}_{cp} = 2\sqrt{B_0} T^{-1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} (G - H \sin \beta) \{I(\beta) [EI(\beta) - (G - H \sin \beta)^2]\}^{-1/2} d\beta.\tag{3}$$

Выражение (3) представляет собой гиперэллиптический интеграл; β_1 и β_2 — нули знаменателя, внутри которых осуществляются колебания по углу β .

Задачу оценки сверху этого интеграла решает неравенство Коши — Буняковского, однако оценка при этом получается весьма грубой.

Будем решать эту задачу для двух различных случаев: $I(\beta) = \text{const}$ и $I(\beta) \neq \text{const}$.

Рассмотрим вначале первый случай. Для него интеграл (3) может быть записан в виде

$$\dot{\alpha}_{cp} = \frac{2}{T} \sqrt{\frac{B_0}{I}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{(\sin \beta_0 - \sin \beta) d\beta}{\sqrt{q^2 - (\sin \beta_0 - \sin \beta)^2}}, \quad q = \frac{\sqrt{EI}}{H}.$$

Осуществим замену переменных, приводящую этот интеграл к собственному виду

$$\sin \beta - \sin \beta_0 = q \sin \varphi.$$

В результате получим

$$|\dot{\alpha}_{cp}| = \frac{2\sqrt{B_0 E}}{TH} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - (\sin \beta_0 + q \sin \varphi)^2}} = \frac{2\sqrt{B_0 E}}{TH} \int_0^{\pi/2} \Phi(\varphi) \sin \varphi d\varphi.\tag{4}$$

Функция $\Phi(\varphi)$ имеет вид

$$\Phi(\varphi) = [1 - (\sin \beta_0 + q \sin \varphi)^2]^{-1/2} - [1 - (\sin \beta_0 - q \sin \varphi)^2]^{-1/2}. \quad (5)$$

Для изучения ее свойств введем обозначения

$$a = \sin \beta_0, \quad x = q \sin \varphi, \quad x \in [0, q] \quad (6)$$

и запишем функцию (5) от новой переменной

$$F(x) = \Phi[\varphi(x)] = [1 - (a+x)^2]^{-1/2} - [1 - (a-x)^2]^{-1/2} \geq [1 - (a+x)^2]^{-1/2} - [1 - (a+x)^2]^{-1/2} = 0. \quad (7)$$

Производная любого порядка функции (7) представляет собой две группы членов, получаемых дифференцированием каждого из слагаемых, составляющих эту функцию. Рассматривая их попарно, можно написать неравенства, аналогичные (7), откуда следует неотрицательность любой производной функции $F(x)$ на отрезке $[0, q]$.

Для функции, обладающей подобными свойствами, можно написать

$$a_1 x + \dots + a_n x^n \leq F(x) \leq a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + b_n x^n. \quad (8)$$

Полином $a_1 x + \dots + a_n x^n$ представляет собой отрезок ряда Тейлора функции $F(x)$; в полиноме, стоящем в правой части неравенства, коэффициент b_n вычисляется по формуле

$$a_1 q + \dots + a_{n-1} q^{n-1} + b_n q^n = F(q). \quad (9)$$

Получающийся таким образом многочлен обладает экстремальными свойствами: из некоторого класса многочленов, мажорирующих функцию $F(x)$, он наименее от нее удален.

Для доказательства этого факта вначале показывается, что функцию $F(x)$ мажорирует любой полином вида

$$b_1 x + \dots + b_n x^n,$$

коэффициенты которого удовлетворяют соотношениям

$$b_i \geq a_i, \quad b_1 q + \dots + b_n q^n = F(q). \quad (10)$$

Затем ставится задача: из всего множества этих многочленов выделить такой, для которого расстояние между верхней и нижней оценками минимально при любом $x \in [0, q]$

$$(b_1 - a_1)x + \dots + (b_n - a_n)x^n = \min. \quad (11)$$

Поскольку соотношение (11) представляет собой линейную форму относительно искомых коэффициентов $(b_i - a_i)$, то сформулированная таким образом задача в точности совпадает с известной ⁽²⁾ задачей линейного программирования. Воспользовавшись ее результатами, и получаем утверждаемый факт.

Рассмотрим оценки первого порядка ($n=1$).

Из (8) и (9) получим

$$xF'(0) \leq F(x) \leq xF(q)/q.$$

Возвращаясь к исходным переменным (8), можно записать

$$\Phi'(0) \sin \varphi \leq \Phi(\varphi) \leq \Phi(\pi/2) \sin \varphi. \quad (12)$$

Из выражения (5) получим

$$\Phi'(0) = 2q \operatorname{tg} \beta_0 \cos^{-2} \beta_0, \quad \Phi(\pi/2) = \sec \beta_2 - \sec \beta_1. \quad (13)$$

Подставив (12) и (13) в интеграл (4), получаем искомые оценки

$$\frac{\pi q \sqrt{B_0 E}}{TH} \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{\cos^2 \beta_0} \leq |\dot{\alpha}_{\text{ср}}| \leq \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{B_0 E}}{TH} (\sec \beta_2 - \sec \beta_1). \quad (14)$$

Все величины, входящие в (14), за исключением периода нутационных колебаний T , определяются начальными данными. Период T может быть вычислен по формуле

$$T = \frac{4\sqrt{B_0 I}}{H\sqrt{(1-\sin\beta_1)(1+\sin\beta_2)}} \cdot K\left(\sqrt{\frac{2(\sin\beta_2 - \sin\beta_1)}{(1-\sin\beta_1)(1+\sin\beta_2)}}\right).$$

Вычисление периода также может быть сведено к элементарным функциям, если воспользоваться неравенством Трикоми ⁽³⁾ для полного эллиптического интеграла первого рода

$$\ln 4 \leq K(k) + \ln(\sqrt{1-k^2}) \leq \pi/2.$$

Из (14) можно получить оценки для величины ухода за период:

$$q \operatorname{tg} \beta_0 / \cos^2 \beta_0 \leq |\dot{\alpha}_{\text{ср}} T H / \pi \sqrt{B_0 E}| \leq 1/2 (\sec \beta_2 - \sec \beta_1).$$

С л у ч а й $I(\beta) \neq \text{const.}$

Имеет место следующая

Л е м м а. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная монотонная функция $\varphi(x) > 0$; непрерывная функция $f(x)$ имеет внутри отрезка один простой нуль: $f(x_0) = 0$. В точке x_0 обе функции имеют первую производную.

Тогда

$$\int_a^b \varphi(x) f(x) dx \begin{cases} \leq \varphi(x_0) \int_a^b f(x) dx, & f'(x_0) \varphi'(x_0) \leq 0, \\ \geq \varphi(x_0) \int_a^b f(x) dx, & f'(x_0) \varphi'(x_0) \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, интеграл (3) удовлетворяет условиям леммы. Роль $\varphi(x)$ играет $I^{-1/2}(\beta)$ для $\beta \in [0, \pi/2]$. Вынося, в соответствии с леммой, $I^{-1/2}(\beta)$ за знак интеграла, задачу сводим к только что изученной.

П р и м е р. $H = 6 \cdot 10^3$ г·см·сек, $I = 6$ г·см·сек⁻², $B_0 = 4$ г·см·сек², $\beta_0 = 30^\circ$, $\dot{\alpha}_0 = 15$ сек⁻¹ (начальное возмущение, вызывающее нутационные колебания по углу β порядка 1°).

По формуле (14) получаем

$$0,074989 \leq |\dot{\alpha}_{\text{ср}}| \leq 0,075041 \text{ сек}^{-1}.$$

При этом точное значение ухода равно $|\dot{\alpha}_{\text{ср}}| = 0,075025 \text{ сек}^{-1}$. Область, определяемая оценками, составляет 0,07% от оцениваемой величины. Значение ухода, подсчитанное по формуле Магнуса, равно 0,075.

Автор благодарит акад. А. Ю. Ишлинского за обсуждение работы и ценные замечания.

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
26 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Ю. Ишлинский, Теория гироскопов, М., Изд-во МГУ, 1974. ² С. Гасс, Линейное программирование, Физматгиз, 1961. ³ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, «Наука», 1967. ⁴ В. В. Кременгуло, Л. М. Мархашов, Инж. журн., т. 1, в. 4 (1961). ⁵ А. Д. Брюно, Мех. тверд. тела, № 6 (1972). ⁶ К. Magnus, Zs. angew. Math. u. Mech., В. 35, Н. 1/2 (1955).