

А. М. ЛЕВИН

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФОРМ АКСИОМЫ ВЫБОРА В КЛАССИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 VII 1975)

Язык формального математического анализа ФМА является расширением языка арифметики; он получается добавлением к языку арифметики нового сорта переменных $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ по множествам натуральных чисел и нового двуместного предиката $\in$. Аксиомы теории ФМА можно разделить на четыре группы:

(I) логические аксиомы — аксиомы классического исчисления предикатов в языке анализа;

(II) конечное число арифметических аксиом и аксиом, связанных с равенством натуральных чисел;

(III) схема индукции $A(0) \& \forall x(A(x) \rightarrow A(x+1)) \rightarrow \forall x A(x)$, где $A(x)$ — произвольная формула языка анализа;

(IV) схема свертывания $\exists \alpha \forall x(x \in \alpha \equiv A(x))$, где $A(x)$ — произвольная формула анализа, не содержащая переменную α свободно.

К теории ФМА можно добавлять различные варианты аксиомы выбора. Мы изучим взаимоотношения между некоторыми важнейшими формулировками аксиомы выбора в анализе. Вначале введем несколько обозначений. Зафиксируем некоторую нумерацию всех конечных последовательностей натуральных чисел; номер последовательности $x_0, \dots, x_n$ мы будем обозначать $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$. По множеству натуральных чисел α и натуральному числу x можно образовать множество $\{y | \langle x, y \rangle \in \alpha\}$, которое будет обозначаться $(\alpha)_x$. Простейшая формулировка аксиомы выбора в анализе такова:

$$AC \quad \forall x \exists \alpha A(x, \alpha) \rightarrow \exists \beta \forall x A(x, (\beta)_x),$$

где $A(x, \alpha)$ — произвольная формула анализа, не содержащая переменную β свободно.

Схема AC^* отличается от схемы AC только тем, что в формуле $A(x, \alpha)$ не должно быть вообще никаких свободных переменных, отличных от переменных x и α .

Теорема 1. *Существует перевод τ_1 , строящий по произвольной замкнутой формуле анализа A новую формулу анализа $\tau_1(A)$, так, что:*

а) *для любой замкнутой формулы анализа A и любого множества Γ таких замкнутых формул анализа, что $\forall B \in \Gamma \quad FMA + AC \vdash \tau_1(B)$, если $FMA + \Gamma \vdash A$, то $FMA + AC \vdash \tau_1(A)$;*

б) *для любой замкнутой формулы анализа A*

$$FMA + AC \vdash \neg(\tau_1(A) \& \tau_1(\neg A));$$

в) *существует такая формула анализа $A(x, \alpha)$, не содержащая никаких свободных переменных кроме x и α , что $FMA + AC \vdash \tau_1(\neg AC(A))$, где $AC(A)$ — следующая формула:*

$$\forall x \exists \alpha A(x, \alpha) \rightarrow \exists \beta \forall x A(x, (\beta)_x).$$

Перевод строится чисто синтаксически и в доказательстве не используется никаких промежуточных теоретико-множественных теорий. Это относится и ко всем остальным теоремам настоящей работы.

Пусть FA — формальная арифметика и для произвольной аксиоматической теории T $\text{Con}(T)$ — арифметическая формула, выражающая непротиворечивость этой теории. Из теоремы 1 легко получить следствия.

Следствие 1.1. $FA \vdash \text{Con}(FMA + AC) \rightarrow \text{Con}(FMA + {}_1AC(A))$.

Следствие 1.2. Если теория FMA непротиворечива, то в ней схема AC^* невыводима.

К анализу можно добавлять и более сильные варианты аксиомы выбора, например, следующую схему зависимого выбора:

$$DC \quad \forall \alpha \exists \beta A(\alpha, \beta) \rightarrow \forall \alpha \exists \gamma ((\gamma)_0 = \alpha \ \& \ \forall x A((\gamma)_x, (\gamma)_{x+1})),$$

где $A(\alpha, \beta)$ — произвольная формула анализа, не содержащая переменную γ свободно. Можно естественно рассмотреть и схему DC^* , которая отличается от схемы DC только тем, что формула $A(\alpha, \beta)$ не должна содержать никаких свободных переменных, отличных от α и β . Легко доказать, впрочем, что схемы DC и DC^* эквивалентны.

Теорема 2. Существует перевод τ_2 , строящий по произвольной замкнутой формуле анализа A новую формулу анализа $\tau_2(A)$ так, что:

а) для любой замкнутой формулы анализа A и любого множества Γ таких замкнутых формул анализа, что

$$\forall B \in \Gamma \ FMA + AC \vdash \tau_2(B), \text{ если } FMA + AC + \Gamma \vdash A,$$

то $FMA + AC \vdash \tau_2(A)$;

б) для любой замкнутой формулы анализа A

$$FMA + AC \vdash {}_1(\tau_2(A) \ \& \ \tau_2({}_1A));$$

в) существует такая формула анализа $A(\alpha, \beta)$, не содержащая никаких свободных переменных кроме α и β , что $FMA + AC \vdash \tau_2({}_1DC(A))$, где $DC(A)$ — следующая формула:

$$\forall \alpha \exists \beta A(\alpha, \beta) \rightarrow \forall \alpha \exists \gamma ((\gamma)_0 = \alpha \ \& \ \forall x A((\gamma)_x, (\gamma)_{x+1})).$$

Из теоремы 2 легко получить следствия.

Следствие 2.1. $FA \vdash \text{Con}(FMA + AC) \rightarrow \text{Con}(FMA + AC + {}_1DC(A))$.

Следствие 2.2. Если теория $FMA + AC$ непротиворечива, то в ней схема DC^* невыводима.

По поводу следствий из теорем 1 и 2 необходимо сделать следующие замечания. Первым доказал невыводимость схемы AC в теории FMA А. Леви (1). Его доказательство существенно использует средства и методы теории множеств и, в частности, существование кардинала $\aleph_\omega$. Таким образом он доказал невыводимость схемы AC в теории FMA только в предположении непротиворечивости теории множеств ZF . Сам А. Леви этот результат точно не формулировал. Это сделал со ссылкой на доказательство Леви Р. Ганди (2), на заметку которого имеются многочисленные ссылки, в частности, у Г. Крайзеля (3, 4). А. Симпсон (5) объявил без доказательства результаты о невыводимости схемы AC в теории FMA и схемы DC в теории $FMA + AC$. Неизвестно, какими средствами доказывает он эти результаты, но методы, судя по ссылке Симпсона на почти непересекающееся кодирование, теоретико-множественные. Кроме того, в отличие от построенной нами интерпретации, у Симпсона схема AC опровергается, по-видимому, в силу особенностей метода на формуле с параметрами. Наконец, автору стало известно, что некоторые результаты о независимости схем AC и DC в анализе и, в частности, о связи схем AC и AC^* получил В. Г. Кановей.

Еще более сильным на первый взгляд вариантом аксиомы выбора в анализе представляется утверждение о существовании вполнеупорядочения класса всех множеств натуральных чисел. Сравнить этот принцип с други-

ми формами аксиомы выбора предлагает, например, Г. Крайзель ⁽³⁾. Расширение анализа этим принципом отражает теория FMA_p , которую мы сейчас сформулируем. Язык FMA_p получается добавлением к языку анализа нового двуместного предикатного символа p . Отношение $p(\alpha, \beta)$ и будет в некотором точном смысле тем отношением, которое вполне упорядочивает класс всех множеств натуральных чисел. К аксиомам теории FMA_p относятся аксиомы всех четырех групп аксиом теории FMA , причем в схемах аксиом допускаются произвольные формулы языка FMA_p . Кроме того добавляется новая пятая группа аксиом, описывающая свойства нового отношения p :

- 1) $\forall \alpha, \beta (p(\alpha, \beta) \vee p(\beta, \alpha))$;
- 2) $\forall \alpha, \beta, \gamma (p(\alpha, \beta) \& p(\beta, \gamma) \rightarrow p(\alpha, \gamma))$;
- 3) $\forall \alpha, \beta (p(\alpha, \beta) \& p(\beta, \alpha) \equiv \forall x (x \in \alpha \equiv x \in \beta))$;
- 4) $\exists \alpha A(\alpha) \rightarrow \exists \alpha (A(\alpha) \& \forall \beta (A(\beta) \rightarrow p(\alpha, \beta)))$, где $A(\alpha)$ — произвольная формула языка FMA_p .

Легко понять, что теория FMA_p является расширением не только теории FMA , но и теории $FMA+DC$. Является ли это расширение существенным? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 3. *Существует перевод τ_3 , строящий по произвольной замкнутой формуле A языка FMA_p формулу $\tau_3(A)$ языка анализа так, что:*

- а) для любой замкнутой формулы A языка FMA_p , если $FMA_p \vdash A$, то $FMA+DC \vdash \tau_3(A)$;
- б) для любой замкнутой формулы A языка анализа $FMA+DC \vdash A \equiv \tau_3(A)$.

Следствие 3.1. *Теория FMA_p является консервативным расширением теории $FMA+DC$, т. е. для любой замкнутой формулы A языка анализа $FMA_p \vdash A$ тогда и только тогда, когда $FMA+DC \vdash A$.*

Теорема 3 показывает, что теория FMA_p не отличается от теории $FMA+DC$ в смысле выводимости формул анализа. С другой стороны, в теории $FMA+DC$ нельзя доказать существование вполнеупорядочения класса всех множеств натуральных чисел. Это показывает следующая

Теорема 4. *Существует перевод τ_4 , строящий по произвольной замкнутой формуле анализа A новую формулу анализа $\tau_4(A)$ так, что:*

- а) для любой замкнутой формулы анализа A и любого множества Γ таких замкнутых формул анализа, что

$$\forall B \in \Gamma \quad FMA+DC \vdash \tau_4(B), \text{ если } FMA+DC+\Gamma \vdash A,$$

то $FMA+DC \vdash \tau_4(A)$;

- б) для любой замкнутой формулы анализа A $FMA+DC \vdash \neg(\tau_4(A) \& \tau_4(\neg A))$;

в) существует такая формула анализа $B(\alpha)$ с единственной свободной переменной α , что для любой формулы анализа $A(\alpha, \beta)$, содержащей свободно только переменные α и β , $FMA+DC \vdash \tau_4(\neg p(A, B))$, где $p(A, B)$ — следующая формула анализа:

$$\begin{aligned} & \forall \alpha, \beta (A(\alpha, \beta) \vee A(\beta, \alpha)) \& \forall \alpha, \beta, \gamma (A(\alpha, \beta) \& A(\beta, \gamma) \rightarrow A(\alpha, \gamma)) \& \\ & \& \forall \alpha, \beta (A(\alpha, \beta) \& A(\beta, \alpha) \equiv \forall x (x \in \alpha \equiv x \in \beta)) \& [\exists \alpha B(\alpha) \rightarrow \\ & \rightarrow \exists \alpha (B(\alpha) \& \forall \beta (B(\beta) \rightarrow A(\alpha, \beta)))]. \end{aligned}$$

Следствие 4.1. *Если теория $FMA+DC$ непротиворечива, то не существует формулы анализа $A(\alpha, \beta)$, содержащей свободно только две указанные переменные, для которой в теории $FMA+DC$ доказуема формула $p(A, B)$.*

Следствие 4.2. *Если теория FMA_p непротиворечива, то не существует формулы анализа $A(\alpha, \beta)$, содержащей свободно только переменные α и β , для которой в теории FMA_p доказуема формула $p(A, B)$.*

С л е д с т в и е 4.3. Если теория FMA_0 непротиворечива, то нет формулы анализа $A(\alpha, \beta)$ такой, что

$$FMA_0 \vdash \forall \alpha, \beta (A(\alpha, \beta) \equiv \rho(\alpha, \beta)).$$

Следствия показывают, что теория FMA_0 является все-таки в некотором точном смысле существенным расширением теории $FMA+DC$ и что нам не случайно пришлось расширить язык анализа для того, чтобы выразить утверждение о существовании вполнеупорядочения класса всех множеств натуральных чисел.

Автор благодарен А. Г. Драгалину за интерес и внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 VII 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Levy, *Mathematical Logic and Foundations of Set Theory*, Amsterdam, 1970, p. 129. ² R. E. Gandy, *J. Symb. Logic*, v. 32, 3, 434 (1967). ³ G. Kreisel, *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*, N. Y., 1969, p. 93. ⁴ G. Kreisel, *J. Symb. Logic*, v. 33, 3, 321 (1968). ⁵ A. Simpson, *Not. Am. Math. Soc.*, v. 20, 5, A499 (1973).