

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, А. В. ПОКРОВСКИЙ

ПРАВИЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 24 IX 1975)

Математическая идеализация различных процессов приводит к дифференциальным и интегральным уравнениям с нелинейностями, разрывными по фазовым переменным. В качестве примера достаточно упомянуть системы с релейными нелинейностями и системы переменной структуры автоматического управления (см., например, ⁽¹⁻³⁾). Один из стандартных методов исследования уравнений с разрывными нелинейностями заключается в переходе к уравнениям с многозначными операторами и последующем обобщении понятия решения соответствующей задачи. При таком подходе возникают новые важные и интересные эффекты, среди которых в первую очередь нужно указать скользящие режимы. Обычные и обобщенные решения $x(t)$ могут, естественно, при некоторых t принимать значения, являющиеся точками разрыва входящих в задачу нелинейностей. Например, из таких t полностью состоит каждый участок скользяния. В то же время, в ряде задач идеализация хороша только в частях фазового пространства, не содержащих точек разрыва нелинейностей, и поэтому особый интерес представляют решения, которые лишь «нулевое время» находятся в точках разрыва.

К решениям, описывающим реальные процессы, в ряде случаев естественно предъявлять дополнительные требования. Эти требования, определяющие правильность решения, могут содержать, в частности, следующие его свойства. Во-первых, желательно, чтобы была нулевой мера множества тех значений аргумента, при которых решение попадает на разрывы нелинейностей. Во-вторых, чтобы решение было точкой непрерывности соответствующего разрывного оператора; только в этом случае имеет смысл применение приближенных методов, основанных на анализе поведения невязок. В-третьих, важно, чтобы каждое мало возмущенное уравнение имело по крайней мере одно решение, близкое к рассматриваемому; при этом «малым» должно считаться и возмущение, порожденное малым сдвигом поверхностей разрыва нелинейностей. Наконец, желательно иметь удобные для фактических вычислений на ЭВМ методы приближенного построения правильных решений.

В случае уравнений с вполне непрерывными операторами правильными будут все изолированные решения ненулевого топологического индекса. Для уравнений с разрывными операторами правильные решения, по-видимому, не выделялись и не изучались. У авторов необходимость в понятии правильного решения возникла при осмысливании ряда задач, возникающих в динамике систем управления, содержащих звенья с релейными и другими разрывными характеристиками.

Достаточно полную теорию правильных решений удалось построить для широких классов задач с монотонными нелинейностями. Излагаемые результаты важны и для уравнений с непрерывными нелинейностями.

1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) f[s, x(s)] ds. \quad (1)$$

Относительно ядра $G(t, s)$ будем предполагать, что оно измеримо и определяет вполне непрерывный интегральный оператор

$$Bx(t) = \int_a^b G(t, s)x(s)ds, \quad (2)$$

действующий из пространства L_∞ ограниченных функций в пространство C непрерывных функций. Функцию $f(t, x)$ будем считать суперпозиционно измеримой (из измеримости $x(t)$ следует измеримость $f[t, x(t)]$) и удовлетворяющей условию

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \sup_{a \leq t \leq b} x^{-1}f(t, x) = 0, \quad (3)$$

которое заведомо выполнено, если $f(t, x)$ ограничена.

Подчеркнем, что функция $f(t, x)$ не предполагается непрерывной по фазовой переменной x .

Решение $x_*(t)$ уравнения (1) назовем полуправильным, если его значения при почти всех t являются точками непрерывности нелинейности $f(t, x)$ по второй переменной. Полуправильные решения уравнения (1) являются в наших условиях точками непрерывности интегрального оператора

$$Ax(t) = \int_a^b G(t, s)f[s, x(s)]ds \quad (4)$$

в пространстве C (и, конечно, его неподвижными точками).

Теорема 1. Пусть ядро $G(t, s)$ почти всюду положительно, а функция $f(t, x)$ удовлетворяет оценке (3) и не убывает по переменной x . Тогда уравнение (1) имеет по крайней мере одно полуправильное решение.

В условиях теоремы 1 легко построить такие $u(t), v(t) \in C$, что $u(t) \leq v(t)$, $Au(t) \geq u(t)$, $Av(t) \leq v(t)$ и непрерывная функция $h(t) = Au(t) - u(t)$ почти всюду положительна. В силу теоремы Биркгофа — Тарского ((⁴, ⁵), см. также (⁶)) при каждом $\varepsilon \in [0, 1]$ оператор

$$A(\varepsilon)x(t) = Ax(t) - \varepsilon h(t) \quad (x(t) \in C) \quad (5)$$

имеет в C наибольшую неподвижную точку $x(t; \varepsilon)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при каждом фиксированном $\varepsilon \in (0, 1]$ (кроме, быть может, счетного числа значений) последовательность

$$x_n(t; \varepsilon) = Ax_{n-1}(t; \varepsilon) - \varepsilon h(t) \quad (x_0(t; \varepsilon) \equiv v(t)) \quad (6)$$

равномерно сходится к $x(t; \varepsilon)$ и имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t; \varepsilon) = \sup_{0 < \varepsilon \leq 1} x(t; \varepsilon) = x_*(t), \quad (7)$$

где $x_*(t)$ — полуправильное решение уравнения (1).

Для приближенного построения полуправильного решения уравнения (1) можно применить итерационную процедуру (6) при достаточно малом ε . Теорема 2 является обоснованием такого метода.

2. Полуправильное решение $x_*(t)$, определенное равенством (7), обладает важными дополнительными свойствами.

Лемма 1. Пусть $z(t)$ — неотрицательная функция из C . Пусть $x_*(t)$ — полуправильное решение (7) уравнения (1). Тогда найдется такая сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел α_k , что

$$\min_i \{A[x_*(t) + \alpha_k z(t)] - [x_*(t) + \alpha_k z(t)]\} \leq 0, \quad \max_i \{[x_*(t) - \alpha_k z(t)] - A[x_*(t) - \alpha_k z(t)]\} \geq 0.$$

Эта лемма вытекает из того очевидного факта, что $Ax(t; \varepsilon) \geq x(t; \varepsilon)$ при $\varepsilon \in (0, 1]$ и что неравенство $x(t) \geq x_*(t)$ ($x(t) \neq x_*(t)$) влечет неравенство $\min \{Ax_*(t) - Ax(t)\} < 0$. Из леммы 1 вытекает, например

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и функция $f(t, x)$ непрерывна по x . Пусть функция (7) является изолированным решением уравнения (1) в пространстве C . Тогда топологический индекс этого решения равен $+1$.

Лемма 1 может быть использована при попытках детального анализа множества тех t , при которых значения решения являются точками разрыва нелинейностей. Ограничимся одним частным утверждением.

Теорема 4. Пусть $G(t, s)$ — функция Грина периодической задачи для обыкновенного дифференциального оператора с непрерывными коэффициентами и пусть она положительна. Пусть $f(t, x) = \text{sign } x + \varphi(t)$, где $\varphi(t) \in C$. Тогда полуправильное решение (7) уравнения (1) обращается в нуль не более чем в конечном числе точек.

3. Решение $x_*(t)$ уравнения (1) назовем усиленно корректным, если каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что в ε -окрестности решения $x_*(t)$ лежит по крайней мере одно полуправильное решение любого удовлетворяющего условиям теоремы 1 уравнения

$$x(t) = \int_a^b G_1(t, s) f_1[s, x(s)] ds, \quad (8)$$

ядро которого при почти всех t удовлетворяет неравенству

$$\int_a^b |G(t, s) - G_1(t, s)| ds < \delta, \quad (9)$$

а хаусдорфово расстояние от графика функции $f_1(t, x)$ до графика функции $f(t, x)$ не превышает δ . Мы употребили эпитет «усиленно», так как близость графиков функций $f_1(t, x)$ и $f(t, x)$ не влечет близости их самих. Ясно, что полуправильное решение не обязательно усиленно корректно и усиленно корректное решение не обязательно полуправильно. Полуправильное и усиленно корректное решение уравнения (1) назовем правильным.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $G(t, s) \geq \gamma > 0$. Пусть решение (7) уравнения (1) изолировано. Тогда это решение правильное.

4. Зафиксируем строго убывающую и стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел σ_k . Определим операторы

$$A_k x(t) = Ax(t) + (-1)^k \sigma_k z(t) \quad (x(t) \in C), \quad (10)$$

где $z(t)$ положительна и непрерывна. Построим последовательность функций $v_n(t)$ по следующему правилу.

Пусть $v_0(t)$ — такая функция из C , что $Av_0(t) < v_0(t)$. Если уже найдена функция $v_{k-1}(t)$, то определим $v_k(t)$ как первую функцию в последовательности $w_j(t) = A_k w_{j-1}(t)$ ($w_0(t) = v_{k-1}(t)$), для которой справедливо соотношение $(-1)^k [A_k w_j(t) - w_j(t)] \leq (\sigma_k - \sigma_{k+2}) z(t)$.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $G(t, s) \geq \gamma > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) элементы последовательности $v_n(t)$ могут быть найдены при каждом n ; при этом справедливы неравенства

$$v_1(t) \leq v_3(t) \leq \dots \leq v_{2k+1}(t) \leq \dots \leq v_{2k}(t) \leq \dots \leq v_4(t) \leq v_2(t) \quad (11)$$

и существуют равномерные пределы

$$x_*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_{2k+1}(t), \quad x_{**}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_{2k}(t), \quad (12)$$

которые являются полуправильными решениями уравнения (1);

б) если в одном из конусных отрезков $\langle v_{2k+1}(t), v_{2k}(t) \rangle$ уравнение (1) имеет лишь конечное число полуправильных решений, то последовательность $v_{2k+1}(t)$ сходится снизу к правильному решению уравнения (1), а последовательность $v_{2k}(t)$ сходится сверху к тому же правильному решению.

Последовательное построение функций $v_n(t)$ естественно назвать методом члпчных приближений для построения решений уравнения (1). Эксперимент на ЭВМ показал достаточную его эффективность; при этом оказалось удобным для достижения «быстрой» сходимости выбирать в качестве σ_n элементы геометрической прогрессии; для поиска же «наиболее корректных» решений применять менее быстро убывающие последовательности σ_n .

5. Ограничения, наложенным выше на $G(t, s)$, удовлетворяют функции Грина многих граничных задач. Поэтому результаты статьи можно формулировать и как теоремы о решениях краевых задач, о периодических колебаниях в нелинейных системах и т. д. Мы ограничились уравнением (1), так как особенности обнаруженных новых фактов в полной мере проявляются уже в этой ситуации. Не вызывают существенных затруднений переходы к векторным переменным t и s , к отличным от L_∞ и C пространствам, к интегральным уравнениям Урысона, к конечным системам интегральных уравнений с векторно-монотонными нелинейностями и т. д. Условие (3) можно заменить менее ограничительным неравенством

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \sup_{a \leq t \leq b} x^{-1} f(t, x) < \frac{1}{\lambda}, \quad (13)$$

где λ — наибольшее собственное значение оператора (2).

Приведенные выше теоремы естественным образом переносятся и на уравнения $x = Ax$ с действующими в полуупорядоченных банаховых пространствах монотонными операторами A , оставляющими инвариантным некоторый конусный отрезок. Следует отметить, что при переходе к операторным уравнениям классическая теорема Биркгофа — Тарского [4, 5] и ее прямые обобщения недостаточны, так как интересующие нас неподвижные точки оператора A должны обладать специальными дополнительными свойствами. Примеры показывают, что такими свойствами может не обладать ни одна неподвижная точка монотонного оператора даже в случае конечномерного пространства, полуупорядоченного миниедральным конусом. Поэтому приходится переходить к более узким классам монотонных операторов.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
27 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Я. З. Цыпкин, Релейные автоматические системы, «Наука», 1974. ² С. В. Емельянов, Системы автоматического регулирования с переменной структурой, «Наука», 1967. ³ В. И. Уткин, Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой, «Наука», 1974. ⁴ Г. Биркгоф, Теория структур, ИЛ, 1952. ⁵ А. Tarski, Pacific J. Math., v. 5, 285 (1955). ⁶ М. А. Красносельский, А. В. Соболев, Сиб. матем. журн., т. 14, № 1, 140 (1973).