

Б. А. ЛУГОВЦОВ

СТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНОГО ВИХРЕВОГО КОЛЬЦА В ПРЕДЕЛЕ ИСЧЕЗАЮЩЕЙ ВЯЗКОСТИ

(Представлено академиком М. А. Лаверентьевым 20 VIII 1975)

В работе ⁽¹⁾ предложена математическая модель для описания движения турбулентных вихревых колец. Эта модель основывается на предположении, что турбулентный характер движения жидкости в вихревом кольце можно учесть введением турбулентного коэффициента вязкости, зависящего от времени. Было показано, что движение турбулентного вихревого кольца хорошо описывается автомодельным решением предложенной системы уравнений.

Для определения распределения завихренности (структуры вихревого кольца) была сформулирована соответствующая краевая задача. В цилиндрической системе координат в автомодельных переменных система уравнений имеет следующий вид ^(1, 2):

$$\begin{aligned} \lambda \left(\omega_{xx} + \omega_{yy} + \frac{1}{y} \omega_y - \frac{1}{y^2} \omega \right) + \frac{1}{4} x \omega_x + \frac{1}{4} y \omega_y + \omega = \\ = \frac{1}{y} \psi_y \omega_x - \frac{1}{y} \psi_x \omega_y + \frac{1}{y^2} \psi_x \omega, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} - \frac{1}{y} \psi_y = -y \omega; \quad (2)$$

здесь ось x является осью симметрии, y — расстояние от оси симметрии, ω — соответствующая компонента вектора завихренности, ψ — функция тока, λ — постоянная, связанная с коэффициентом турбулентной вязкости.

Требуется найти решение этой системы при следующих условиях:

$$\omega = \psi = 0 \text{ при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \quad \omega = \psi = 0 \text{ при } y = 0, \quad (3)$$

$$\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \omega y^2 dy dx = 1,$$

где нормировка является следствием закона сохранения вихревого импульса исходной системы уравнений ⁽¹⁾.

Величина λ является эмпирической постоянной и определяется из эксперимента. Приближенное решение ⁽²⁾ и результаты эксперимента ⁽¹⁾ показывают, что λ является малой величиной. Это обстоятельство является основным источником трудностей, возникающих при попытке численного решения рассматриваемой задачи.

В связи с этим естественно рассмотреть предельный случай $\lambda \rightarrow 0$, что соответствует стремлению к нулю турбулентной вязкости (исчезающая вязкость). Если это предельное решение будет найдено, то оно послужит хорошей основой для численного решения задачи при конечных λ .

Сделаем замену переменных, полагая

$$\begin{aligned} \xi = \frac{1}{\lambda^{1/2}} \left(x - \frac{1}{\lambda^{3/2}} \xi_0 \right), \quad \eta = \frac{1}{\lambda^{1/2}} y, \quad \mu = \frac{1}{\lambda^2}, \\ \omega = \frac{1}{\lambda^2} \bar{\omega}(\xi, \eta), \quad \psi = \frac{1}{\lambda^{1/2}} (\Psi + \frac{1}{8} \xi_0 \eta^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Эта замена, кроме растяжения, соответствует переходу в систему координат, связанную с вихревым кольцом.

Уравнение (1) примет следующий вид:

$$\bar{\omega}_{\xi\xi} + \bar{\omega}_{\eta\eta} + \frac{1}{\eta} \bar{\omega}_{\eta} - \frac{1}{\eta^2} \bar{\omega} + \frac{1}{4} \xi \bar{\omega}_{\xi} + \frac{1}{4} \eta \bar{\omega}_{\eta} + \bar{\omega} = \\ = \mu \left[\Psi_{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\bar{\omega}}{\eta} \right) - \Psi_{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\bar{\omega}}{\eta} \right) \right], \quad (5)$$

а уравнение (2) и нормировка (3) будут иметь тот же вид с заменой $x \rightarrow \xi$ и $y \rightarrow \eta$. Граничные условия для $\bar{\omega}$ останутся прежними, а для Ψ на бесконечности получаем

$$\frac{1}{\eta} \Psi_{\eta} \rightarrow -\frac{1}{4} \xi_0, \quad \frac{1}{\eta} \Psi_{\xi} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Величина ξ_0 определяется требованием, чтобы максимум $\bar{\omega}$ лежал на линии $\xi=0$.

Приближенные решения рассматриваемой задачи, полученные в (2), дают основания для предположения, что в новых переменных решение при $\lambda \rightarrow 0$ (соответственно $\mu \rightarrow \infty$) стремится к некоторому ограниченному предельному решению. При таком предположении из (5) следует, что в пределе $\mu \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$\frac{\bar{\omega}}{\eta} = \Omega = \Omega(\Psi), \quad (7)$$

где, однако, вид функциональной зависимости $\Omega(\Psi)$ остается неопределенным. В искомом течении линия тока $\Psi=0$ разделяет область течения на две области: внешнюю, в которой линии тока идут из бесконечности в бесконечность, и внутреннюю (атмосфера вихревого кольца), в которой линии тока замкнуты. В силу граничного условия на бесконечности для $\bar{\omega}$ из (7) следует, что во внешней области в пределе $\Omega \equiv 0$. Вид же $\Omega(\Psi)$ во внутренней области необходимо определить.

Аналогичная задача рассматривалась в работе (3) для стационарных течений вязкой жидкости с замкнутыми линиями тока в пределе, когда число Рейнольдса стремится к бесконечности. Следуя идеям этой работы, проинтегрируем уравнение (5) по области с границей, определяемой некоторой замкнутой линией тока. Правая часть при этом, как нетрудно проверить, тождественно обращается в нуль и в результате мы при любом μ имеем равенство

$$\oint \eta \nabla \Omega \cdot \mathbf{n} \, dl + 2 \oint \Omega n_{\eta} \, dl + \frac{1}{4} \oint \xi \eta \Omega n_{\xi} \, dl + \frac{1}{4} \oint \eta^2 \Omega n_{\eta} \, dl + \frac{1}{2} \int \int \eta \Omega \, d\xi \, d\eta = 0; \quad (8)$$

здесь dl — элемент длины линии тока, $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к линии тока.

Совершая теперь предельный переход $\mu \rightarrow \infty$ и учитывая, что при этом $\Omega \rightarrow \Omega(\Psi)$, получаем из (8)

$$\frac{d\Omega}{d\Psi} \cdot P(\Psi) = \frac{1}{2} \Gamma(\Psi) + \frac{3}{4} S(\Psi) \cdot \Omega(\Psi), \quad (9)$$

где $P(\Psi) = \oint \eta^3 \Omega \, d\xi \, d\eta$, $S(\Psi) = \oint \eta \, d\xi \, d\eta$, $\Gamma(\Psi) = \oint \eta \Omega \, d\xi \, d\eta$ — циркуляция по линии тока; здесь интегрирование производится по области, определяемой замкнутой линией тока.

Таким образом, в пределе $\mu \rightarrow \infty$ определение структуры вихревого кольца сводится к задаче на склейку ⁽⁴⁾ потенциального (во внешней области) и вихревого (во внутренней области) течения невязкой жидкости при условии непрерывности Ψ и $\nabla \Psi$ на границе, причем вид функции $\Omega(\Psi)$ определяется обыкновенным (относительно переменной Ψ) дифференциальным уравнением (9).

Можно показать, что из предположения об ограниченности предельного решения следует его непрерывность. Поэтому к уравнению (9) следует добавить граничное условие $\Omega(0)=0$.

Аналогичная процедура в случае плоского аналога вихревого кольца (пара вихревых нитей) дает следующее дифференциальное уравнение для $\Omega(\Psi)$ (в плоском случае Ω — завихренность):

$$\frac{d\Omega}{d\Psi} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{S(\Psi)\Omega(\Psi)}{\Gamma(\Psi)}, \quad \Omega(0)=0,$$

где $\Gamma(\Psi)$ — циркуляция, $S(\Psi)$ — площадь области, ограниченной некоторой линией тока.

Численное решение сформулированной задачи (т. е. отыскание решения в предельном случае $\mu \rightarrow \infty$) значительно проще исходной задачи.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
29 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Луговцов, Б. А. Луговцов, В. Ф. Тарасов, Динамика сплошной среды, в. 3, Новосибирск, 1969. ² Б. А. Луговцов, Некоторые проблемы математики и механики, Л., «Наука», 1970. ³ G. K. Batchelor, J. Fluid Mech., № 1 (1956). ⁴ М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Проблемы гидродинамики и их математические модели, М., «Наука», 1973.