

С. Н. КРУЖКОВ

ЗАДАЧА КОШИ — ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ ТИПА ЭЙКОНАЛА

(Представлено академиком В. С. Владимировым 20 V 1975)

В области Ω m -мерного евклидова пространства R_m с границей $\partial\Omega$ рассматривается уравнение

$$f(x, u(x), u_x(x)) = n^2(x, u) > 0, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_m)$, $u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_m})$, функции $n(x, u)$, $f(x, u, p)$, $p = (p_1, \dots, p_m)$, непрерывны в области $\Omega \times R_1 \times R_m$, причем

$$f(x, u, 0) \equiv 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times R_1 \quad (2)$$

и на любом компакте в $\Omega \times R_1 \times R_m$

$$\inf n(x, u) > 0, \quad \sup [n(x, u) + |f(x, u, p)|] < \infty. \quad (3)$$

Предполагается также, что функция $f(x, u, p)$ выпукла криво по p : $\forall x \in \Omega$, $u \in R_1$, p и $\Delta p \in R_m$

$$f(x, u, p - \Delta p) - 2f(x, u, p) + f(x, u, p + \Delta p) \geq 0, \quad (4)$$

а функция $H(x, u, p) = f(x, u, p) - n^2(x, u)$ монотонна по u : $\forall x \in \Omega$, $p \in R_m$, $u_1 \leq u_2$

$$H(x, u_1, p) \geq H(x, u_2, p). \quad (5)$$

Типичный представитель рассматриваемых уравнений — классическое уравнение эйконала в геометрической оптике (см. (1)):

$$|u_x|^2 = n^2 = \text{const} > 0. \quad (6)$$

В настоящей работе построена нелокальная теория обобщенных решений задачи Коши — Дирихле для уравнения (1) в Ω с начальным — краевым условием

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi \quad (7a)$$

и условием на бесконечности в случае неограниченной области Ω :

$$u(x) \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad x \in \Omega \quad (7б)$$

или

$$u(x) - \omega(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad x \in \Omega, \quad (7в)$$

где $\omega(x)$ — некоторое гладкое в $\Omega \cap \{|x| \geq N\}$ решение уравнения (1).

Двойственность в названии задачи объясняется тем, что эта задача Коши для уравнения первого порядка по свойствам и методу построения решений родственна задаче Дирихле для уравнения Лапласа.

В работе введено понятие обобщенного решения задачи (1), (7a) (или (1), (7a), (7б) или (1), (7a), (7в)); кратко — о.р. (1), (7)), установлены теоремы существования, единственности, устойчивости решений. О.р. (1), (7) $u(x)$ построено путем предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow +0$ по решениям $u^\varepsilon(x)$ соответствующих задач Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения

$$f(x, u, u_x) = n^2(x, u) - \varepsilon \Delta u, \quad \varepsilon = \text{const} > 0, \quad (8)$$

где Δ — оператор Лапласа *; одновременно здесь получены оценки скорости

* Исследование задачи (8), (7) представляет самостоятельный интерес, ибо возможная сильная нелинейность функции $f(x, u, p)$ по p исключает применение известных результатов теории задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений.

сходимости u^ε к $u(x)$. Такой метод построения решений находится в полном соответствии с принципом определения геометрической оптики, основанном на коротковолновой асимптотике решений системы Максвелла ⁽⁴⁾.

В случае уравнения

$$f(u_x)=1, \quad f(0)=0 \quad (9)$$

соответствующее о.р. (9), (7) представляется в явном виде, что позволяет сравнительно легко обосновать в рамках данной теории принципы Ферма и Гюйгенса. Физические аспекты построенной здесь теории и ее отношение к теории оптимального управления и теории игр предпологается обсудить в других публикациях.

Отметим также, что близкими методами задача Коши для другого (но родственного) класса уравнений Гамильтона — Якоби была исследована в ⁽²⁻⁷⁾.

1. Понятие обобщенного решения: теоремы единственности и устойчивости. Будем обозначать через $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ совокупность функций $u(x)$, определенных на множестве $\mathcal{D} \subset \bar{R}_m$ и удовлетворяющих условию Липшица на любом ограниченном его подмножестве. Скажем, что функция $u(x)$ из $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ принадлежит классу устойчивости $E(\mathcal{D})$, если $\forall x, x+\Delta x, x-\Delta x \in \mathcal{D}, \Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta^2 u}{|\Delta x|^2} = \frac{u(x+\Delta x) - 2u(x) + u(x-\Delta x)}{|\Delta x|^2} \geq \lambda(\mathcal{D}) = \text{const}. \quad (10)$$

Определение. О.р. (1), (7) называется функцией $u(x) \in \mathcal{L}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду в Ω , принимающая заданные граничные значения и на любом компакте $\mathcal{D} \subset \Omega$ принадлежащая к $E(\mathcal{D})$.

Теорема 1. О.р. (1), (7) единственно.

Теорема 1 вытекает из следующего предложения об устойчивости о.р. (1), (7) относительно изменения граничных данных.

Теорема 2. Пусть u_k — о.р. (1), (7) с граничными данными φ_k, ω_k соответственно, $k=1, 2$. Тогда

$$\sup_{\Omega} |u_1 - u_2| \leq \sup_{\partial\Omega} |\varphi_1 - \varphi_2| + \lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{|x|=r, x \in \Omega} |\omega_1 - \omega_2|. \quad (11)$$

Основные моменты доказательства теоремы 2 приведем здесь для случая уравнения эйконала (6) и ограниченной области Ω . Пусть $\{u_k^h, k=1, 2\}$ — последовательности дважды гладких в $\bar{\Omega}$ функций, равномерно сходящихся в $\bar{\Omega}$ при $h \rightarrow 0$ к функциям u_x , причем $(u_k^h)_x \rightarrow (u_k)_x$ по метрике $L_1(\Omega)$ и в соответствии с требованием (10) $(u_k^h)_{x_i x_j} \geq \text{const}$ равномерно по h в любой строго внутренней подобласти (такие последовательности можно построить, например, при помощи средних функций). Легко убедиться, что при любом фиксированном $\alpha > 0$ функции v_k^h , построенные по функциям u_k^h по формуле $v = v_\alpha(u) = \alpha^{-1}[\exp(\alpha u) - 1]$, удовлетворяют уравнениям $|v_x|^2 = n^2(1 + \alpha v)^2 + \beta_k^h(x)$, где $\beta_k^h(x) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ по норме $L_1(\Omega)$.

Рассмотрим теперь функцию $w^h = v_1^h - v_2^h$ в фиксированной подобласти $\Omega_\delta \subset \Omega$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega_\delta \subset \{x \in \Omega: \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$. Поскольку равномерно по h $(v_k^h)_{x_i x_j} \geq C_\delta = \text{const}$ в Ω_δ и $1 + \alpha v_k^h \geq c(\alpha) = \text{const} > 0$ в Ω , то функция w^h удовлетворяет в Ω_δ уравнению

$$a^h(x) \cdot w_x^h = b^h(x) w^h + \beta^h, \quad (12)$$

где $b^h(x) \geq \text{const} > 0$ равномерно по h , $\text{div } a^h \geq 2mC_\delta$, $\beta^h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ по норме $L_1(\Omega)$. Пусть s — натуральное число; умножим уравнение (12) на $(w^h)^{2s-1}$ и проинтегрируем по Ω_δ . Преобразовав левую часть при помощи ин-

тегрирования по частям, находим, что при $s \geq s_0(\delta)$

$$\int_{\Omega_\delta} |w^h|^{2s} dx \leq M_1 \int_{\partial\Omega_\delta} |w^h|^{2s} d\sigma + M_2(\delta) \int_{\Omega} |\beta^h| dx, \quad (13)$$

где M_1 не зависит ни от h , ни от s , а M_2 не зависит от h . Устремляем h к 0 в (13) и извлекаем корень степени $2s$ из обеих частей полученного неравенства для $w = v_1 - v_2$, $v_k = v_\alpha(u_k)$. В пределе при $s \rightarrow \infty$ получаем далее, что

$$\max_{\Omega_\delta} |w| \leq \max_{\partial\Omega_\delta} |w|. \quad (14)$$

Переходя в (14) последовательно к пределам при $\delta \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow 0$ и заметив, что $v = v_\alpha(u) \rightarrow u$ при $\alpha \rightarrow 0$, выводим утверждение теоремы.

2. Теорема существования; обоснование метода коротковолновой аппроксимации. Для простоты формулировок ограничимся здесь рассмотрением задачи (9), (7) в ограниченной области Ω , предполагая, что $f(p) \in C^{2,\alpha}$, матрица $\|f_{p_i p_j}(p)\| > 0$ и что $f(p) \rightarrow +\infty$ при $|p| \rightarrow \infty$; здесь (7) = (7a).

Теорема 3. Для существования о.р. (9), (7) необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое непрерывное по Липшицу продолжение функции φ из (7) на $\bar{\Omega}$ (сохраним за ним обозначение φ), что почти всюду в $\bar{\Omega}$ $f(\varphi_x) \leq 1$.

Необходимость указанного условия очевидна. Для доказательства достаточности предварительно регуляризуем функцию φ (продолжение) и границу области Ω при помощи малых возмущений (в определенном смысле) таким образом, что регуляризованные φ и $\partial\Omega \in C^3$, причем $f(\varphi_x) < 1$ в $\bar{\Omega}$ (эта операция допускает физическое толкование)

Теорема 4. При достаточно малых $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ существует единственное решение $u^\varepsilon(x) \in C^k(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ задачи Дирихле для уравнения (8) (где $n=1$, а функция $f=f(u_x)$ может иметь сколь угодно быстрый рост) с граничным условием (7), причем в $\bar{\Omega}$

$$|u^\varepsilon| + |u_x^\varepsilon| \leq c, \quad \partial^2 u^\varepsilon / \partial l^2 \geq -c; \quad (15)$$

здесь (как и всюду далее), через c обозначены различные константы, не зависящие от ε , а через l обозначено любое фиксированное направление в R_m . Можно указать такие числа $\mu = c \in (0, 1)$ и $\nu = c \in (0, 1)$, что $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0)$

$$\max_{\Omega} |u^{\varepsilon_1} - u^{\varepsilon_2}| \leq c(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^\mu, \quad \int_{\Omega} |u_x^{\varepsilon_1} - u_x^{\varepsilon_2}| dx \leq c(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^\nu. \quad (16)$$

Теорема 5. При $\varepsilon \rightarrow +0$ функции $u^\varepsilon(x)$ сходятся к о.р. (9), (7) со скоростью, характеризуемой оценками (16).

Для доказательства теорем 4 и 5 сначала при помощи барьеров и принципа максимума получаем априорные оценки (15), первая из которых позволяет установить теорему существования решения задачи (8), (7). Пользуясь оценками (15) и применяя методику доказательства теоремы 2 для оценки функции $u^{\varepsilon_1} - u^{\varepsilon_2}$ в норме L_s , находим, что при достаточно большом $s \geq c$

$$\int_{\Omega} |u^{\varepsilon_1} - u^{\varepsilon_2}|^s dx \leq c(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (17)$$

Оценки (16) следуют из (15) и (17) вследствие интерполяционных неравенств (см. (3), стр. 407, 408). Полученные результаты позволяют перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в уравнении (8) по метрике $L_1(\Omega)$; ясно, что в силу второй оценки в (15) $u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(x) \in E(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} = \bar{\mathcal{D}} \subset \Omega$.

3. Формула для о.р. (9), (7). Принципы Ферма и Гюйгенса. Пусть функция $f(p)$ удовлетворяет условиям предыдущего раздела, а граница $\partial\Omega$ выпуклой области Ω компактна. Введем оптическую длину гладкой кривой $y\Gamma z = \{x: x=x(\tau) \in \Omega, 0 \leq \tau \leq 1\}$, соединяющей точки $y=x(0)$ — начало и $z=x(1)$ — конец:

$$d(y\Gamma z) = \int_0^1 \left[\max_{p: f(p)=1} \dot{x}(\tau) \cdot p \right] d\tau. \quad (18)$$

Нетрудно видеть, что для случая, когда $y\Gamma z$ — отрезок с началом в y и концом в z ,

$$d(y\Gamma z) = \Phi(z-y), \quad \Phi(x) = \max_{p: f(p)=1} x \cdot p,$$

причем функции $\pm\Phi(\pm x)$ являются гладкими решениями уравнения (9), $\Phi(x) > 0$ при $x \neq 0$ и, вообще говоря, $\Phi(x) \neq \Phi(-x)$.

Теорема 6. Для существования о.р. (9), (7) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\varphi(x) - \varphi(y) \leq \Phi(x-y) \quad \forall x, y \in \partial\Omega. \quad (19)$$

При условии (19) о.р. (9), (7) представимо формулой

$$u(x) = \max_{y \in \partial\Omega} [\varphi(y) - \Phi(y-x)].$$

Теорема 7. Пусть $\varphi \equiv 0$, т. е. $\partial\Omega$ совпадает с положением волнового фронта в момент времени $t=0$. Тогда $\forall x, z \in \Omega$

$$u(x) - u(z) \leq \Phi(x-z) \leq d(z\Gamma x) \quad \forall z\Gamma x \subset \Omega \quad (20)$$

и любой гладкий кусок поверхности уровня $u(x) = -ct = \text{const}$ совпадает с частью огибающей семейства оваловидов $\{x \in R_m: \Phi(y-x) = ct, y \in \partial\Omega\}$.

Неравенства (20) и последнее утверждение теоремы 7 представляют собой принципы Ферма и Гюйгенса соответственно.

З а м е ч а н и е. Подчеркнем, что применяемый здесь метод построения обобщенного решения задачи (1), (7) аналогичен методу «исчезающей вязкости» в гидромеханике, а также методу стохастической аппроксимации детерминированных процессов в теории динамических систем и в теории оптимального управления.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, «Наука», 1973. ² С. Н. Кружков, ДАН, т. 132, № 1 (1960). ³ С. Н. Кружков, ДАН, т. 155, № 4 (1964). ⁴ С. Н. Кружков, ДАН, т. 167, № 2 (1966). ⁵ С. Н. Кружков, Матем. сб., т. 70, № 3 (1966). ⁶ С. Н. Кружков, Матем. сб., т. 72, № 1 (1967). ⁷ С. Н. Кружков, Нелинейные уравнения с частными производными (лекции), ч. 2, Уравнения первого порядка, ротационный МГУ, 1970.