

Е. С. ЛЕВИТИН

К ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 4 VI 1975)

В банаховом пространстве X рассматривается минимизация функционала $F_0(x)$ при ограничениях: $F_i(x) \leq 0$, $i=1, \dots, m$, $g(x)=0$, где $F_i(x)$, $i=0, 1, \dots, m$, — вещественные функционалы в X , $g(x)$ — оператор из X в другое B -пространство Y . Эту задачу будем называть исходной. Пусть задано возмущение исходной задачи, т. е. задано метрическое пространство Ω , точка $\omega_0 \in \Omega$ и на $X \times \Omega$ определены вещественные функционалы $\bar{F}_i(x, \omega)$, $i=0, 1, \dots, m$, и оператор $\bar{g}(x, \omega)$ со значениями в Y , причем $\bar{F}_i(x, \omega_0) = F_i(x)$, $i=0, 1, \dots, m$, $\bar{g}(x, \omega_0) = g(x)$. Положим

$$F_i(x, \omega) = F_i(x) + \bar{F}_i(x, \omega), \quad i=0, 1, \dots, m, \quad g(x, \omega) = g(x) + \bar{g}(x, \omega).$$

Обозначим $Q(\omega) = \{x \in X: F_i(x, \omega) \leq 0, i=1, \dots, m, g(x, \omega) = 0\}$. Задачу минимизации функционала $F_0(x, \omega)$ на множестве $Q(\omega)$ при фиксированном $\omega \in \Omega$ будем называть возмущенной задачей, а функционал $\mu(\omega) = \inf_{x \in Q(\omega)} F_0(x, \omega)$, если $Q(\omega) \neq \emptyset$ (если $Q(\omega) = \emptyset$, то положим $\mu(\omega) = +\infty$),

будем называть функцией возмущения.

Пусть x_0 — какое-либо из решений исходной задачи, $r > 0$

$$Q_{x_0, r}(\omega) = \{x \in Q(\omega): \|x - x_0\| \leq r\}, \quad \mu_{x_0, r}(\omega) = \inf_{x \in Q_{x_0, r}(\omega)} F_0(x, \omega).$$

Функционал $\mu_{x_0, r}(\omega)$ будем называть локальной функцией возмущения. Ниже везде предполагается, что:

(I) в некоторой окрестности точки x_0 функционалы $F_i(x)$ и оператор $g(x)$ дифференцируемы по Фреше, причем градиенты Фреше $F_{ix}(x)$, $g_x(x)$ удовлетворяют условию Липшица;

(II) точка x_0 регулярна для ограничений исходной задачи, т. е. оператор $g_x(x_0)$ отображает X на все Y и существует $\bar{x} \in X$ такое, что $g_x(x_0)\bar{x} = 0$, $\langle F_{ix}(x_0), \bar{x} \rangle < 0$, если $i \in I(x_0) = \{1 \leq j \leq m: F_j(x_0) = 0\}$;

(III) существуют $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ такие, что если $\rho_\Omega(\omega, \omega_0) \leq d_1$, $\max[\|x' - x_0\|, \|x'' - x_0\|] \leq d_2$, то

$$\begin{aligned} |\bar{F}_i(x_0, \omega)| &\leq A_i \rho_\Omega(\omega, \omega_0), \quad |\bar{F}_i(x', \omega) - \bar{F}_i(x'', \omega)| \leq \\ &\leq B_i \|x' - x''\| \rho_\Omega(\omega, \omega_0), \quad i=0, 1, \dots, m, \quad \|\bar{g}(x_0, \omega)\| \leq \\ &\leq A \rho_\Omega(\omega, \omega_0), \quad \|\bar{g}(x', \omega) - \bar{g}(x'', \omega)\| \leq B \|x' - x''\| \rho_\Omega(\omega, \omega_0), \end{aligned}$$

где A_i, A, B_i, B — положительные константы.

Л е м м а (об оценке расстояния). Существуют такие $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $r > 0$, $C > 0$, что если $\rho_\Omega(\omega, \omega_0) \leq d_1$, то множество $Q_{x_0, r}(\omega) \neq \emptyset$ и для любого x из шара $\|x - x_0\| \leq d_2$

$$\text{dis}(x, Q_{x_0, r}(\omega)) = \inf_{\tilde{x} \in Q_{x_0, r}(\omega)} \|x - \tilde{x}\| \leq C \left\{ \sum_{i=1}^m F_i^+(x, \omega) + \|g(x, \omega)\| \right\}$$

(здесь и ниже $a^+ = \max[a, 0]$ для любого числа a).

Из леммы следует, что существуют такие $d > 0$, $r > 0$, что в шаре $\rho(\omega, \omega_0) \leq d$ функция $\mu_{x_0, r}(\omega)$ удовлетворяет условию Липшица.

Для любого $\lambda = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, y^*) \in R^m \times Y^*$ положим

$$L(x, \lambda) = F_0(x) - F_0(x_0) + \sum_{i=1}^m \alpha_i F_i(x) + \langle y^*, g(x) \rangle,$$

$$\bar{L}(x, \omega, \lambda) = \bar{F}_0(x, \omega) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{F}_i(x, \omega) + \langle y^*, \bar{g}(x, \omega) \rangle,$$

$$L(x, \omega, \lambda) = L(x, \lambda) + \bar{L}(x, \omega, \lambda).$$

Как известно из необходимых условий минимума, множество

$$\Lambda(x_0) = \{\lambda = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, y^*) : \alpha_i \geq 0, \alpha_i F_i(x_0) = 0, \\ i = 1, \dots, m, L(x_0, \lambda) = 0\} \neq \emptyset$$

(можно показать, что $\Lambda(x_0)$ — сильный компакт в $R^m \times Y^*$).

Теорема 1. Существует $r > 0$ такое, что при $\omega \rightarrow \omega_0$

$$\mu_{x_0, r}(\omega) \leq F_0(x_0) + \sup_{\lambda \in \Lambda(x_0)} \bar{L}(x_0, \omega, \lambda) + O(1) \rho_\alpha^2(\omega, \omega_0).$$

Теорема 2. Пусть $\forall \eta > 0 \exists \varepsilon = \varepsilon(x_0, \eta) > 0$ такое, что если $\|\delta x\| \leq \varepsilon$, то

$$L(x_0 + \delta x, \lambda) + \eta \sigma(x_0 + \delta x) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda(x_0), \quad (1)$$

$$\text{где } \sigma(x_0 + \delta x) = [F_0(x_0 + \delta x) - F_0(x_0)]^+ + \sum_{i=1}^m F_i^+(x_0 + \delta x) + \|g(x_0 + \delta x)\|.$$

Тогда существует $r > 0$ такое, что при $\omega \rightarrow \omega_0$

$$\mu_{x_0, r}(\omega) \geq F_0(x_0) + \sup_{\lambda \in \Lambda(x_0)} \bar{L}(x_0, \omega, \lambda) + o(\rho_\alpha(\omega, \omega_0)).$$

Замечание. Условие (1) является достаточным (но, вообще говоря, не необходимым) для того, чтобы x_0 , в которой $\Lambda(x_0) \neq \emptyset$, была точкой локального минимума исходной задачи (условие (1) тривиально выполнено, если при каждом фиксированном $\lambda \in \Lambda(x_0)$ функционал $L(x, \lambda)$ выпуклый по x в некоторой окрестности точки x_0). Необходимым для локального минимума в регулярной точке x_0 , в которой $\Lambda(x_0) \neq \emptyset$, является следующее условие (см. (2)): $\forall \eta > 0 \exists \varepsilon = \varepsilon(x_0, \eta) > 0$ такое, что если $\|\delta x\| \leq \varepsilon$, то

$$\sup_{\lambda \in \Lambda(x_0)} L(x_0 + \delta x, \lambda) + \eta \sigma(x_0 + \delta x) \geq 0.$$

Поэтому условие (1) выполнено, если множество $\Lambda(x_0)$ состоит из единственной точки $\lambda_0 = (\{\alpha_i^0\}, y_0^*)$; для этого достаточно, а если $\alpha_i^0 > 0$ для $i \in I(x_0)$, то и необходимо, чтобы

$$\left\| \sum_{i \in I(x_0)} \alpha_i F_{ix}(x_0) + [g_x(x_0)]^* y^* \right\| > 0, \quad \text{если } \sum_{i \in I(x_0)} |\alpha_i| + \|y^*\| > 0.$$

Теоремы 1 и 2 обобщают результаты, полученные в (4), на возмущения, не дифференцируемые по ω (в смысле Фреше). В частности, если возмущения $\bar{F}_i(x_0, \omega)$, $i = 0, 1, \dots, m$, $\bar{g}(x_0, \omega)$ имеют в точке ω_0 производную по любому направлению $\bar{\omega}$, то из этих теорем легко следует формула для производной по направлению $\bar{\omega}$ функции $\mu_{x_0, r}(\omega)$ в точке ω_0 .

Скажем, что для исходной задачи в точке x_0 выполнено усиленное достаточное условие второго порядка, если $\exists R > 0, \varepsilon > 0$ и $\kappa > 0$ такие, что если $\|\delta x\| \leq \varepsilon$, то $\forall \lambda \in \Lambda(x_0)$

$$L(x_0 + \delta x, \lambda) + R \left\{ [F_0(x_0 + \delta x) - F_0(x_0)]^2 + \sum_{i=1}^m [F_i^+(x_0 + \delta x)]^2 + \right. \\ \left. + \|g(x_0 + \delta x)\|^2 \right\} \geq \kappa \|\delta x\|^2. \quad (2)$$

Это условие всегда выполнено, если конус

$$K(x_0) = \{\bar{x} \in X: \langle F_{ix}(x_0), \bar{x} \rangle \leq 0, i \in \{0\} \cup I(x_0), g_x(x_0)\bar{x} = 0\} = \{0\},$$

где $I(x_0) = \{1 \leq i \leq m: F_i(x_0) = 0\}$. Если же $K(x_0) \neq \{0\}$, то условие (2) эквивалентно существованию $\kappa_1 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ таких, что $L(x_0 + \delta x, \lambda) \geq \kappa_1 \|\delta x\|^2 \forall \lambda \in \Lambda(x_0)$, $\delta x \in K(x_0)$, $\|\delta x\| \leq \varepsilon$. Если $K(x_0) \neq \{0\}$, множество $\Lambda(x_0)$ состоит из единственной точки λ^0 , то условие (2) эквивалентно γ -достаточности в точке x_0 с $\gamma(\delta x) = \|\delta x\|^2$ (см. теорему 5.2 из (2)).

Пусть $K(x_0) \neq \{0\}$, существует $\varepsilon > 0$ такое, что если $\delta x \in K(x_0)$, $\|\delta x\| \leq \varepsilon$, то $F_i(x_0 + \delta x) \geq F_i(x_0) + \langle F_{ix}(x_0), \delta x \rangle + o(\|\delta x\|^2)$, (например, для $i \in I(x_0)$) функционалы $F_i(x)$ являются выпуклыми на $K(x_0)$. Далее, пусть $g(x) = Ax - b$, где $A \in \mathcal{L}[X \rightarrow Y]$, $b \in Y$. Наконец, предположим, что существуют такие $a > 0$, $\varepsilon > 0$, что $F_0(x + \delta x) \geq F_0(x_0) + \langle F_{0x}(x_0), \delta x \rangle + a\|\delta x\|^2$, если $\delta x \in K(x_0)$, $\|\delta x\| \leq \varepsilon$. Тогда в точке x_0 выполнено усиленное достаточное условие второго порядка, хотя при этом множество $\Lambda(x_0)$ не обязательно состоит лишь из одной точки.

Теорема 3. Пусть в точке x_0 выполнено усиленное достаточное условие второго порядка. Тогда существует такое $r > 0$, что если $x(\omega) \in X$,

$$\|x(\omega) - x_0\| \leq r, \quad F_i(x(\omega), \omega) \leq O(1)\rho^2(\omega, \omega_0), i = 1, \dots, m,$$

$$\|g(x(\omega), \omega)\| \leq O(1)\rho^2(\omega, \omega_0), F_0(x(\omega), \omega) \leq \mu_{x_0, r}(\omega) + O(1)\rho^2(\omega, \omega_0),$$

то $\|x(\omega) - x_0\| \leq O(1)\rho(\omega, \omega_0)$ при $\omega \rightarrow \omega_0$.

Замечание. Пусть параметр ω входит только в целевую функцию (т. е. ограничения не возмущаются). Тогда утверждение теоремы 3 верно, если требовать просто достаточное условие второго порядка в точке x_0 .

Предположим теперь, что в некоторой окрестности точки $\{x_0, \omega_0\}$ метрического произведения $X \times \Omega$ функционалы $F_i(x, \omega)$ $i = 0, 1, \dots, m$, и оператор $g(x, \omega)$ дважды непрерывно дифференцируемы по x (в смысле Фреше).

Теорема 4. Пусть в точке x_0 выполнено усиленное достаточное условие второго порядка. Далее, пусть множество

$$\mathfrak{M}_{x_0, r}(\omega) = \{x \in O_{x_0, r}(\omega): F_0(x, \omega) = \mu_{x_0, r}(\omega)\} \neq \emptyset,$$

если $r > 0$ и $\rho(\omega, \omega_0)$ достаточно малы. Тогда существуют такие $d > 0$, $r > 0$, $L_1 > 0$, $L_2 > 0$, что если $\omega, \omega', \omega'' \in S_d(\omega_0) = \{\bar{\omega}: \rho(\bar{\omega}, \omega_0) \leq d\}$, то:

I) множество $\mathfrak{M}_{x_0, r}(\omega)$ состоит из единственной точки $x(\omega)$;

(II) $\|x(\omega') - x(\omega'')\| \leq L_1 \rho(\omega', \omega'')$;

(III) множество $\Lambda(x(\omega), \omega) = \{\lambda = (\{\alpha_i\}, y^*) \in R^m \times Y^*: \alpha_i \geq 0, \alpha_i F_i(x(\omega), \omega) = 0, i = 1, \dots, m, L_x(x(\omega), \omega, \lambda) = 0\} \neq \emptyset$, причем

$$\sup_{\lambda \in \Lambda(x(\omega), \omega)} \text{dis}(\lambda, \Lambda(x_0)) \leq L_2 \rho(\omega, \omega_0).$$

Теорема 5. Пусть множество $\Lambda(x_0)$ состоит из единственной точки $\lambda_0 = (\{\alpha_i^0\}, y_0^*)$, для которой $\alpha_i^0 > 0$, $i \in I(x_0)$. Тогда в условиях теоремы 4 существуют такие $d > 0$, $r > 0$, $L_2 > 0$, что если $\omega, \omega', \omega'' \in S_d(\omega_0)$, то множество $\Lambda(x(\omega), \omega)$, где $x(\omega)$ — единственная точка множества $\mathfrak{M}_{x_0, r}(\omega)$, состоит из единственной точки $\lambda(\omega)$, причем $\|\lambda(\omega') - \lambda(\omega'')\| \leq L_2 \rho(\omega', \omega'')$.

Получим теперь дифференциальные разложения второго порядка. Ниже в теоремах 6, 7 везде предполагается, что Ω — банахово пространство, в точке $\{x_0, \omega_0\}$ банахова произведения $X \times \Omega$ функционалы $F_i(x, \omega)$ и оператор $g(x, \omega)$ дважды непрерывно дифференцируемы (в смысле Фреше) по совокупности $\{x, \omega\}$. Положим для любого $\bar{\omega} \in \Omega$

$$\Gamma(x_0, \bar{\omega}) = \{\bar{x} \in X: \langle F_{ix}^0, \bar{x} \rangle + \langle F_{i\omega}^0, \bar{\omega} \rangle \leq 0, i \in I(x_0), g_x^0 \bar{x} + g_\omega^0 \bar{\omega} = 0\}$$

(здесь и ниже индекс 0 сверху означает, что все производные вычисляются в точке $\{x_0, \omega_0\}$). Далее, пусть

$$\Gamma_0(x_0, \bar{\omega}) = \{\tilde{x} \in \Gamma(x_0, \bar{\omega}): \langle F_{0x}^0, \tilde{x} \rangle = \inf_{\bar{x} \in \Gamma(x_0, \bar{\omega})} \langle F_{0x}^0, \bar{x} \rangle\}$$

(можно доказать, что $\Gamma_0(x_0, \bar{\omega}) \neq \emptyset \vee \bar{\omega} \in \Omega$). Наконец, для любых $\bar{\omega} \in \Omega$, $\bar{x} \in \Gamma_0(x_0, \bar{\omega})$ обозначим

$$\Lambda(x_0, \bar{x}, \bar{\omega}) = \{\lambda \in \Lambda(x_0) : \alpha_i(\langle F_{ix}^0, \bar{x} \rangle + \langle F_{i\omega}^0, \bar{\omega} \rangle) = 0, i=1, \dots, m\}.$$

Теорема 6. Пусть $\omega(t) = \omega_0 + t\bar{\omega} + 1/2 t^2 \bar{\bar{\omega}} + w_2(t)$, где $\bar{\omega}, \bar{\bar{\omega}} \in \Omega$, $t > 0$, $w_2(t) \in \Omega$, $\|w_2(t)\| = o(t^2)$ при $t \rightarrow +0$. Далее, пусть $\exists \bar{r} > 0$ такое, что если

$$\|x(t) - x_0\| \leq \bar{r}, \quad F_i(x(t), \omega(t)) \leq O(1)t^2, \quad i=1, \dots, m,$$

$$\|g(x(t), \omega(t))\| \leq O(1)t^2, \quad F_0(x(t), \omega(t)) \leq \mu_{x_0, r}(\omega(t)) + O(1)t^2,$$

то $\|x(t) - x_0\| \leq O(1)t$ (например, в точке x_0 выполнено усиленное достаточное условие второго порядка). Тогда $\exists r > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} \mu_{x_0, r}(\omega(t)) &= F_0(x_0) + t \sup_{\lambda \in \Lambda(x_0)} \langle L_\omega(x_0, \omega_0, \lambda), \bar{\omega} \rangle + \\ &+ 1/2 t^2 \inf_{\bar{x} \in \Gamma_0(x_0, \bar{\omega})} \sup_{\lambda \in \Lambda(x_0, \bar{x}, \bar{\omega})} \{ \langle L_\omega(x_0, \omega_0, \lambda), \bar{\bar{\omega}} \rangle + \\ &+ L_{xx}(x_0, \omega_0, \lambda) [\bar{x}, \bar{x}] + 2L_{x\omega}(x_0, \omega_0, \lambda) [\bar{x}, \bar{\omega}] + \\ &+ L_{\omega\omega}(x_0, \omega_0, \lambda) [\bar{\omega}, \bar{\omega}] \} + o(t^2) \quad \text{при } t \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Замечание. Для конечномерных задач аналогичный результат (с $\bar{\omega} = 0$, $w_2(t) = 0$) получен в (3) для одного частного случая, когда справедливо усиленное достаточное условие второго порядка.

Наличие двукратной непрерывной дифференцируемости в точке $\{x_0, \omega_0\}$ по совокупности $\{x, \omega\}$ (а не только по x) позволяет существенно усилить теорему 5.

Теорема 7. Пусть в точке x_0 выполнено достаточное условие второго порядка, множество $\Lambda(x_0)$ состоит из единственной точки $\lambda_0 = (\{\lambda_i^0\}, y_0^*)$, для которой $\alpha_i^0 > 0$, $i \in I(x_0)$. Тогда существуют такие $d > 0$, $r > 0$, что если $\rho(\omega, \omega_0) \leq d$, то:

а) множество $\mathfrak{M}_{x_0, r}(\omega) \neq \emptyset$;

б) операторы $x(\omega)$ и $\lambda(\omega)$ — единственные точки множества $\mathfrak{M}_{x_0, r}(\omega)$ и $\Lambda(x(\omega), \omega)$ соответственно — непрерывно дифференцируемы по Фреше в точке ω_0 , причем $\bar{x} = x'(\omega_0)\bar{\omega}$ и $\bar{\lambda} = \lambda'(\omega_0)\bar{\omega}$ определяются (однозначно) из решения системы

$$L_{xx}(x_0, \lambda_0)\bar{x} + L_{x\lambda}(x_0, \lambda_0)\bar{\lambda} + L_{x\omega}(x_0, \omega_0, \lambda_0)\bar{\omega} = 0,$$

$$\langle F_{ix}(x_0), \bar{x} \rangle + \langle E_{i\omega}(x_0, \omega_0), \bar{\omega} \rangle = 0, \quad i \in I(x_0),$$

$$g_x(x_0)\bar{x} + g_\omega(x_0, \omega_0)\bar{\omega} = 0;$$

в) функционал $\mu_{x_0, r}(\omega)$ дважды непрерывно дифференцируем в точке ω_0 , причем

$$\begin{aligned} \mu_{x_0, r}(\omega_0 + \bar{\omega}) &= F_0(x_0) + \langle L_\omega(x_0, \omega_0, \lambda_0), \bar{\omega} \rangle + \\ &+ 1/2 \{ L_{\omega\omega}(x_0, \omega_0, \lambda_0) [\bar{\omega}, \bar{\omega}] + 2L_{x\omega}(x_0, \omega_0, \lambda_0) [x'(\omega_0)\bar{\omega}, \bar{\omega}] + \\ &+ L_{xx}(x_0, \omega_0, \lambda_0) [x'(\omega_0)\bar{\omega}, x'(\omega_0)\bar{\omega}] \} + o(\|\bar{\omega}\|^2). \end{aligned}$$

Для возмущений специального вида теорема 7 получена для конечномерного случая в (4), а для бесконечномерных задач с ограничениями только типа равенств в (5).

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
21 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. С. Левитин, ДАН, т. 215, № 4 (1974). ² Е. С. Левитин, А. А. Милютин, Н. П. Осмоловский, Сб.: Математическая экономика и функциональный анализ, «Наука», 1974. ³ В. Ф. Демьянов, А. Б. Певный, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 14, № 5 (1974). ⁴ А. Фиакко, Г. Мак-Кормик, Нелинейное программирование, М., «Мир», 1972. ⁵ А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, Теория экстремальных задач, «Наука», 1974.