

Академик АН УССР И. И. ЛЯШКО, В. П. ДИДЕНКО

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПО ТИХОНОВУ ЗАДАЧ С СИММЕТРИЧНЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В работе рассматривается регуляризация некорректной задачи

$$Au=f, \quad (1)$$

когда оператор A является симметричным, u — искомая, а f — заданная функции. Для построения регуляризующей последовательности в этом случае используется функционал $\Phi(u) = (Au, u) - 2(u, f)$ со стабилизатором, т. е. существенно используется симметричность оператора, что дает преимущества в счете по сравнению с вычислением регуляризующей последовательности на основе среднеквадратического функционала со стабилизатором. Рассуждения проводятся как в случае позитивных, так и негативных пространств.

Введем необходимые обозначения. Через H_0 обозначим гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{H_0}$ и нормой $\|\cdot\|_{H_0}$. Пусть в H_0 можно указать всюду плотное линейное множество H_+ , являющееся гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_{H_+}$, $\|\cdot\|_{H_+}$ — норма в H_+ . Примем H_+ в качестве позитивного пространства и построим по H_+ и H_0 негативное пространство H_- с нормой $\|\cdot\|_{H_-}$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{H_-}$. Существует изометрический оператор I , переводящий все H_- на H_+ и ему обратный I^{-1} , переводящий все H_+ на H_- . Для элементов $\alpha \in H_-$ и $\beta \in H_+$ определена билинейная форма $(\alpha, \beta)_0$, совпадающая при $\alpha \in H_0$ со скалярным произведением в H_0 , причем

$$(u, v)_{H_-} = (u, Iv)_0 = (Iu, v)_0 = (Iu, Iv)_{H_+} \quad \forall u, v \in H_-, \quad (2)$$

$$(\psi, \varphi)_{H_+} = (I^{-1}\psi, \varphi)_0 = (\psi, I^{-1}\varphi)_0 = (I^{-1}\psi, I^{-1}\varphi)_{H_-} \quad \forall \psi, \varphi \in H_+.$$

Пусть задача (1) имеет и притом единственное решение u_0 . Предполагаем, что A является симметричным $((Au, v)_0 = (u, Av)_0)$, непрерывным и неотрицательным $((Au, u)_0 \geq 0)$ оператором из H_- в H_+ . Рассмотрим функционал

$$\Phi(u) = (Au, u)_0 - 2(u, f)_0, \quad u \in H_-, \quad f \in R(A) \subset H_+,$$

где $R(A)$ — область значений оператора A . Ясно, что решение u_0 задачи (1) доставляет минимум этому функционалу и наоборот, функция u , доставляющая минимум функционалу $\Phi(u)$, является решением уравнения (1).

Рассмотрим теперь параметрический функционал

$$F_\alpha(u) = (Au, u)_0 - 2(u, f)_0 + \alpha(u, u)_{H_-},$$

где α — числовой параметр, $\alpha > 0$.

Для любого фиксированного $\alpha > 0$ существует единственный элемент $u_\alpha \in H_-$, доставляющий минимум функционалу $F_\alpha(u)$, т. е. $\min_u F_\alpha(u) = F_\alpha(u_\alpha)$.

Действительно, очевидно, что $([A + \alpha I]u, u)_0 \geq \alpha(u, u)_{H_-}$. Поэтому, в качестве новой нормы примем $\|u\|^2 = ([A + \alpha I]u, u)_0$, скалярное произведение обозначим $[u, v] = ([A + \alpha I]u, v)_0$. Оценим выражение $(u, f)_0$:

$$|(u, f)_0| \leq \|u\|_{H_-} \|f\|_{H_+} \leq \text{const} \|u\|.$$

Согласно теореме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве существует единственный элемент такой, что

$$(u, f)_0 = [u_\alpha, u],$$

поэтому функционал $F_\alpha(u)$ можно записать в следующей форме:

$$F_\alpha(u) = [u, u] - 2[u, u_\alpha] = \|u - u_\alpha\|^2 - \|u_\alpha\|^2.$$

Отсюда видно, что u_α доставляет минимум функционалу $F_\alpha(u)$. Ясно, что $F_\alpha(u_\alpha) \leq F_\alpha(u_0)$, где u_0 — решение задачи (1). Или, расписывая это подробно, имеем

$$(Au_\alpha, u_\alpha)_0 - 2(u_\alpha, f) + \alpha \|u_\alpha\|_{H_-}^2 + (u_0, f)_0 \leq \alpha \|u_0\|_{H_-}^2. \quad (3)$$

Заметим, что имеет место неравенство

$$(Au_\alpha, u_\alpha)_0 - 2(u_\alpha, f) + (u_0, f)_0 \geq 0. \quad (4)$$

Поэтому справедливо неравенство

$$\|u_\alpha\|_{H_-} \leq \|u_0\|_{H_0}. \quad (5)$$

Таким образом, множество $\{u_\alpha\}$ слабо компактно и из любой последовательности $\{u_\alpha\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность (пусть это будет $\{u_\alpha\}$), слабый предел которой при $\alpha \rightarrow 0$ обозначим через $\bar{u}$. Поскольку A непрерывен, следовательно, слабо непрерывен, поэтому $A(u_\alpha) \rightarrow \bar{f}$, $\alpha \rightarrow 0$. Нужно показать, что $u_0 = \bar{u}$, $f = \bar{f}$. Переходя в неравенстве (3) к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ и учитывая (4) и (5), получаем

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{(Au_\alpha, u_\alpha)_0 - 2(u_\alpha, f)_0\} = -(u_0, f)_0,$$

т. е. предельный элемент $\bar{u}$ доставляет минимум функционалу $\Phi(u)$, и, следовательно, является решением задачи (1). Решение же u_0 задачи (1) единственно, следовательно, $\bar{u} = u_0$ и в силу слабой непрерывности A , имеем $f = \bar{f}$.

Из неравенства (5), из слабой сходимости u_α к u_0 и известного неравенства $\|u_0\|_{H_-} \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u_\alpha\|_{H_-}$ следует сильная сходимость u_α к u_0 , т. е.

$$\|u_\alpha - u_0\|_{H_-} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0.$$

В силу непрерывности оператора A имеем

$$\|Au_\alpha - f\|_{H_+} \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Заметим, что нет необходимости извлекать подпоследовательности $u_\alpha \rightarrow u_0$ слабо в H_- . Этим доказана

Теорема 1. Пусть A является симметричным $((Au, v)_0 = (u, Av)_0)$, непрерывным и неотрицательным $((Au, u)_0 \geq 0)$ оператором из H_- в H_+ , а задача (1) имеет единственное решение $u_0 \in H_-$. Тогда:

1) для любого $\alpha > 0$ существует единственный элемент $u_\alpha \in H_-$, доставляющий минимум функционалу $F_\alpha(u)$,

2) справедливы соотношения

$$\|u_\alpha - u_0\|_{H_-} \rightarrow 0, \quad \|Au_\alpha - f\|_{H_+} \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

Таким образом, последовательность $\{u_\alpha\}$ будет регуляризующей для задачи (1). Для ее вычисления следует находить минимумы функционалов $F_\alpha(u_\alpha)$ непосредственно или решая соответствующие уравнения Эйлера, которые в данном случае имеют вид

$$Au_\alpha + \alpha Iu_\alpha = f. \quad (6)$$

Если A действует из H_+ в H_- , то, проводя аналогичные рассуждения, получим уравнение Эйлера в виде

$$Au_\alpha + \alpha I^{-1}u_\alpha = f. \quad (7)$$

Если A действует из H_0 в H_0 , то уравнения Эйлера имеют вид

$$Au_\alpha + \alpha u_\alpha = f.$$

Определенная таким образом регуляризация не содержит выражений вида A^*A (в случае интегрального оператора, не содержит сверток ядер), что приводит к упрощению вычислительного процесса.

В случае, если A — вполне непрерывный, скажем, интегральный оператор с симметричным ядром, то некорректная задача решения интегральных уравнений Фредгольма I рода сводится к решению уравнений Фредгольма II рода — корректной задаче.

Поясним сказанное на примере конкретных пространств. Рассмотрим в качестве H_0 пространство L_2 -интегрируемых с квадратом функций в n -мерной области Ω , H_+ и H_- соответственно пространство Соболева W_2^l и ему сопряженное негативное пространство W_2^{-l} . При $l=1$ введенный выше оператор I^{-1} имеет вид

$$I^{-1}u = -\Delta u + u, \quad u \in W_2^1,$$

Δ — оператор Лапласа, а оператор I является интегральным с ядром-функцией Грина для выражения $-\Delta u + u$ с граничными условиями $\frac{du}{dn} \Big|_\Gamma = 0$,

где d/dn — производная по нормали к границе Γ области Ω .

Пусть A — вполне непрерывный интегральный оператор из W_2^{-l} в W_2^l . Возьмем произвольный элемент $z \in W_2^{-l}$ и образуем с помощью (6) билинейную форму

$$(Au_\alpha, z)_0 + \alpha (Iu_\alpha, z)_0 = (j, z)_0. \quad (8)$$

На основании (2) для первого слагаемого левой части (8) получаем

$$(Au_\alpha, z)_0 = (u_\alpha, Az)_0 = (Iu_\alpha, I^{-1}Az)_0 = ((I^{-1}A)^* Iu_\alpha, z)_0.$$

С учетом последнего и, обозначая $Iu_\alpha = v_\alpha$, получим из (8) уравнение

$$(I^{-1}A)^* v_\alpha + \alpha v_\alpha = f. \quad (9)$$

Оператор $(I^{-1}A)^*$ вполне непрерывен из W_2^{-l} в W_2^l . Действительно,

$$\begin{array}{ccc} W_2^{-l} & \xrightarrow{I^{-1}A} & W_2^l \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_2^{-l} & \xrightarrow{A} & W_2^l \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_2^l & \xleftarrow{(I^{-1}A)^*} & W_2^{-l} \end{array}.$$

Поэтому (9) является уравнением Фредгольма второго рода. Значения v_α составляют последовательность гладких функций, что существенно при численном решении. Искомые u_α определяются по формуле $u_\alpha = I^{-1}v_\alpha$.

Пусть теперь оператор A вполне непрерывный, интегральный из W_2^{-l} в L_2 . Уравнение Эйлера в этом случае будет иметь вид (7). Обозначая $I^{-1}u_\alpha = v_\alpha$, как и в (1), получаем уравнение Фредгольма второго рода.

Теорема 2. Пусть уравнение $Au = f$, где оператор A интегральный, вполне непрерывный из W_2^{-l} в W_2^l имеет единственное решение u_0 , тогда регуляризирующая последовательность $u_\alpha = I^{-1}v_\alpha$ определяется параметрическим семейством уравнений Фредгольма второго рода

$$(I^{-1}A)^* v_\alpha + \alpha v_\alpha = f,$$

причем $\|u_\alpha - u_0\|_{W_2^{-l}} \rightarrow 0$, $\|Au_\alpha - f\|_{W_2^l} \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$.

Аналогичный результат устанавливается в случае, когда оператор A действует из W_2^l в L_2 или W_2^{-l} .

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
18 VII 1975.

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Н. Тихонов, ДАН, т. 151, № 3, 501 (1963).