

УДК 539.377

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Академик АН УССР Я. С. ПОДСТРИГАЧ, Ю. М. КОЛЯНО

УЧЕТ ТЕПЛОТДАЧИ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Рассмотрим оболочку, отнесенную к триортогональной системе координатных линий (α, β, γ) , являющихся соответственно линиями главных кривизн срединной поверхности и внешней нормалью к ней. Уравнение теплопроводности для определения нестационарного температурного поля t в оболочке толщиной 2δ имеет вид ⁽¹⁾

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \gamma^2} + 2k \frac{\partial t}{\partial \gamma} + p^2 t = -\frac{w}{\lambda}, \quad (1)$$

где $2k = k_1 + k_2$, k_1, k_2 — кривизны координатных линий,

$$p^2 = \Delta - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \Delta = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right],$$

A, B — коэффициенты Ляме срединной поверхности оболочки, λ и a — коэффициент теплопроводности и температуропроводности, w — плотность источников тепла, τ — время.

Пусть через поверхности $\gamma = \pm \delta$ оболочки осуществляется теплообмен с внешней средой в соответствии с законом Ньютона, т. е.

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial \gamma} \pm \alpha_n^\pm(\alpha, \beta) (t - t_c^\pm) = 0 \quad \text{при } \gamma = \pm \delta, \quad (2)$$

где $\alpha_n^\pm(\alpha, \beta)$ — коэффициенты теплоотдачи с поверхностями $\gamma = \pm \delta$, $t_c^\pm(\alpha, \beta, \tau)$ — температуры сред, омывающих эти поверхности.

На торцевой поверхности S оболочки могут быть заданы условия теплообмена первого — третьего рода ⁽¹⁾. Начальное условие примем в виде

$$t = t_0 \quad \text{при } \tau = 0. \quad (3)$$

Если температура по толщине оболочки изменяется по линейному закону

$$t = T + \frac{\gamma}{\delta} T^*, \quad (4)$$

где

$$T = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} t d\gamma, \quad T^* = \frac{3}{2\delta^2} \int_{-\delta}^{\delta} \gamma t d\gamma, \quad (5)$$

то, интегрируя уравнения (1) в соответствии с (5) и учитывая условия (2), приходим к следующей системе уравнений теплопроводности для тонких оболочек:

$$\Delta T - \kappa_+^2 (T - t_+^c) - \kappa_-^2 (T^* - t_-^c) + \frac{2k}{\delta} T^* = \frac{\dot{T}}{a} - \frac{W}{\lambda},$$

$$\Delta T^* - 3[\kappa_+^2 (T^* - t_-^c) + \kappa_-^2 (T - t_+^c) + \delta^{-2} T^*] = \frac{\dot{T}^*}{a} - \frac{W^*}{\lambda}, \quad (6)$$

где

$$\kappa_{\pm}^2 = \frac{\alpha_n^+(\alpha, \beta) \pm \alpha_n^-(\alpha, \beta)}{2\lambda\delta}, \quad W = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} w \, d\gamma,$$

$$W^* = \frac{3}{2\delta^2} \int_{-\delta}^{\delta} \gamma w \, d\gamma, \quad t_{\pm}^c = \frac{t_c^+ \pm t_c^-}{2}.$$

Интегрируя (3) в соответствии с (5), получаем

$$T = T_0, \quad T^* = T_0^* \quad \text{при} \quad \tau = 0. \quad (7)$$

Аналогично необходимо проинтегрировать заданное на торцевой поверхности S оболочки условие теплообмена.

Для тонких пластинок в уравнениях (6) $k=0$, $\gamma=z$, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $\alpha_n^{\pm}(x, y)$ или $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$, $\alpha_n^{\pm}(r, \varphi)$.

В случае симметричной относительно срединной поверхности оболочки (пластинки) задачи теплопроводности система уравнений (6) обращается в уравнение вида

$$\Delta T - \kappa^2 (T - t_c) = \frac{\dot{T}}{a} - \frac{W}{\lambda}, \quad (8)$$

где $\kappa^2 = \alpha_n/\lambda\delta$, α_n — переменный коэффициент теплоотдачи с боковых поверхностей оболочки (пластинки), t_c — температура среды, омывающей эти поверхности.

Для вывода уравнения теплопроводности для стержней кругового поперечного сечения рассмотрим цилиндр радиуса R , через поверхность $r=R$ которого осуществляется теплообмен с внешней средой температуры t_c по закону Ньютона, т. е.

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial r} + \alpha_n(r) (t - t_c) = 0 \quad \text{при} \quad r = R. \quad (9)$$

На торцевых поверхностях $z = \pm l$ цилиндра могут быть заданы условия теплообмена первого — третьего рода. Начальное условие имеет вид (3).

Вводя в рассмотрение интегральную характеристику температуры

$$T = \frac{2}{R^2} \int_0^R r t \, dr \quad (10)$$

и интегрируя аналогично предыдущему уравнение теплопроводности для цилиндра

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{\dot{t}}{a} - \frac{w}{\lambda} \quad (11)$$

в соответствии с (10), приходим к уравнению теплопроводности для стержней кругового поперечного сечения

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \kappa^2(r) (T - t_c) = \frac{\dot{T}}{a} - \frac{W}{\lambda}, \quad (12)$$

где

$$W = \frac{2}{R^2} \int_0^R r w \, dr, \quad \kappa^2(r) = \frac{2\alpha_n(r)}{2R},$$

$\alpha_n(r)$ — коэффициент теплоотдачи с поверхности $r=R$.

Аналогично следует проинтегрировать заданное на торцевых поверхностях $z = \pm l$ цилиндра условие теплообмена и начальное условие.

Рассмотрим бесконечные цилиндрическую оболочку, пластинку толщиной 2δ , стержень кругового поперечного сечения радиуса R , которые подвергаются термоудару внешней средой температуры θ_c по области $|\xi| \leq h$ каждой боковой поверхности или же равномерно распределенными по толщине оболочки (пластинки), сечению стержня внутренними источниками тепла мощности q , действующими в области $|\xi| \leq h$. Согласно (8), (12), для определения температурного поля в них имеем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} - \kappa_1^2 T = \frac{\dot{T}}{a} + [(\kappa_0^2 - \kappa_1^2)T - \theta S_+(\tau)] [S_-(\xi + h) - S_+(\xi - h)], \quad (13)$$

где $\kappa_0^2 = \alpha_0 / \lambda \beta_*$, $\kappa_1^2 = \alpha_1 / \lambda \beta_*$, α_0 — коэффициент теплоотдачи с боковой поверхности элемента на участке $|\xi| \leq h$, α_1 — коэффициент теплоотдачи с остальной ее части, $\theta = q / \lambda$ при нагреве элемента внутренними источниками тепла, $\theta = \kappa_0^2 \theta_c$ при нагреве элемента внешней средой; для пластинки и оболочки $\beta_* = \delta$, для стержня $\beta_* = R/2$, для пластинки $\xi = x$, для оболочки и стержня $\xi = z$, $S_{\pm}(\eta)$ — асимметричные единичные функции, $T|_{\tau=0} = 0$.

Пусть длина области локального нагрева соизмерима с толщиной 2δ оболочки (пластинки) или с диаметром $2R$ сечения стержня. Перейдем в уравнении (13) к пределу при $h \rightarrow 0$, сохраняя при этом постоянными приведенные величины $Q = 2h\theta$, $A = 2h\alpha_*$. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} - \kappa_1^2 T = \frac{\dot{T}}{a} + [2mT|_{\tau=0} - QS_+(\tau)] \delta(\xi), \quad (14)$$

где $m = \frac{A_0}{\Lambda}(1 - K_\alpha)$, $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака, $\Lambda = 2\lambda\delta$, $K_\alpha = \alpha_1 / \alpha_0$.

Применив к уравнению (14) преобразование Лапласа, получаем

$$\frac{d^2 \bar{T}}{d\xi^2} - \gamma_s^2 \bar{T} = \left(2m\bar{T} - \frac{Q}{s} \right) \delta(\xi), \quad \gamma_s = \sqrt{\frac{s}{a} + \kappa_1^2}. \quad (15)$$

Поскольку решение уравнения (15) имеет вид

$$\bar{T} = \left(\frac{Q}{s} - 2m\bar{T}|_{\xi=0} \right) \frac{\exp(-\gamma_s |\xi|)}{2\gamma_s}, \quad (16)$$

то

$$\bar{T} = \frac{Q}{2s(\gamma_s + m)}.$$

Следовательно,

$$\bar{T} = \frac{Q \exp(-\gamma_s |\xi|)}{2s(\gamma_s + m)}. \quad (17)$$

Переходя в (17) от изображения к оригиналу, приходим к искомому температурному полю в рассматриваемых тонкостенных элементах конструкций

$$\begin{aligned} T(Z, Fo) = & \frac{Q}{4} \left[\frac{\exp(-|Z| \sqrt{Bi})}{b + \sqrt{Bi}} \operatorname{erfc} \left(\frac{|Z|}{2\sqrt{Fo}} - \sqrt{Bi} \right) + \right. \\ & + \frac{\exp(|Z| \sqrt{Bi})}{b - \sqrt{Bi}} \operatorname{erfc} \left(\frac{|Z|}{2\sqrt{Fo}} + \sqrt{Bi} \right) - \frac{2b}{b^2 - Bi} \exp(b|Z| + b^2 Fo - Mi) \times \\ & \left. \times \operatorname{erfc} \left(\frac{|Z|}{2\sqrt{Fo}} + b\sqrt{Fo} \right) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где $Bi = \alpha_1 \beta_* / \lambda$ — критерий Био, $Mi = Bi \cdot Fo$ — критерий Михеева, $Fo = a\tau / \beta_*^2$ — критерий Фурье, $b = m\beta_*$, $Q^* = Q\beta_*$, $Z = \xi / \beta_*$; $\beta_* = \delta$ для пластины (оболочки), $\beta_* = R/2$ для стержня.

Обусловленные температурным полем (18) квазистатические температурные напряжения, например в локально нагреваемой источниками тепла свободной от внешней нагрузки бесконечной пластинке, определим по известным (2) формулам в виде

$$\sigma_y = \frac{\sigma_{yy}}{\alpha_t E Q^*} = - \frac{T(X, Fo)}{Q^*}, \quad Q^* = \frac{2q}{\lambda} \delta h,$$

где $X = x/\delta$, α_t — температурный коэффициент линейного расширения, E — модуль упругости.

На рис. 1 представлены графики изменения безразмерных температурных напряжений σ_y в зависимости от безразмерного времени Fo в сечениях $X=0$; 1 пластинки при $h=\delta$, переменной ($Bi=0,25$; $Bi_0=0,89$) и постоянной ($Bi=Bi_0=0,25$) теплоотдаче с боковых поверхностей пластинки. Из графиков следует, что неравномерность теплоотдачи с боковых поверхностей тонкостенных элементов конструкций при локальном нагреве оказывает значительное влияние на распределение в них температурных напряжений.

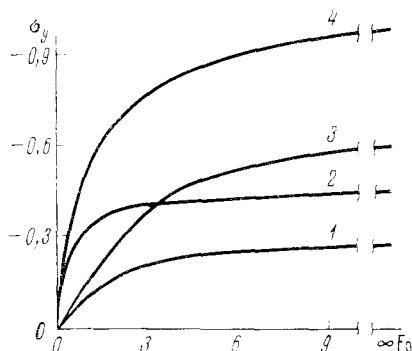


Рис. 1. $X=1$ (1, 3), $Bi_0=0,89$ (1, 2), 0,25 (3, 4); $Bi=0,25$

Львовский филиал математической физики
Института математики
Академии наук УССР

Поступило
11 VIII 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Я. С. Підстригач, С. Я. Ярема, Температурні напруження в оболонках, Київ, Вид-во АН УРСР, 1961. ² Я. С. Підстригач, Ю. М. Коляно, Неустановившіся температурні поля і напруження в тонких пластинках, Київ, «Наукова думка», 1972.