

УДК 51.01+518.5

МАТЕМАТИКА

В. Л. МАТРОСОВ

КЛАССЫ СЛОЖНОСТИ И КЛАССЫ СИГНАЛИЗИРУЮЩИХ ВЫЧИСЛИМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 IX 1975)

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы дать машинно-независимую характеристику сложности вычислимых функций для таких мер сложности, как время вычисления и объем памяти.

Мы будем использовать терминологию, определения и обозначения статьи ⁽¹⁾.

Следуя Смутьяну ⁽²⁾, будем использовать двузначную запись натуральных чисел строками из двоек и единиц.

Обозначим N — натуральный ряд; $l(x)$ — длину записи числа x ; x^*y — конкатенацию слов x, y .

Определение 1. Функция $f(x, y)$ получена операцией ограниченной синтаксической рекурсии из функций g_1, g_2, h_1, h_2, j , если

$$\begin{aligned} f(x, i) &= g_i(x), \\ f(x, y^*i) &= h_i(x, y, f(x, y)), \\ f(x, y) &\leq j(x, y), \quad i=1, 2. \end{aligned}$$

Обозначим $\mathcal{F}$ наименьший класс функций, содержащий тождественную функцию, функцию $\lambda xy(x^*y)$ и замкнутый относительно операции подстановки, ограниченной синтаксической рекурсии и явных преобразований ⁽¹⁾.

Класс $\mathcal{F}$ имеет характеристику в терминах сложности вычисления на одноленточных машинах Тьюринга (м. Т.), а именно, верна

Теорема 1. В класс $\mathcal{F}$ входят те и только те функции, которые вычислимы на м. Т. за время, полиномиально зависящее от длины входных слов x , и с длиной ленты $c \cdot l(x)$ (где c — константа).

Определим следующую модель вычислительной машины ⁽¹⁾: $M = (\mathcal{G}, \mathfrak{F}, n, H, T, U)$, где $\mathcal{G}$ — множество состояний (конфигураций); $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{G}$ — множество заключительных состояний; $H: N^n \rightarrow \mathcal{G}$ — функция входа; $T: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ — функция перехода; $U: \mathcal{G} \rightarrow N$ — функция выхода.

С каждой машиной M связывается функция f от n аргументов, которую она вычисляет. Вычисление $f(x)$ (где $x = x_1, x_2, \dots, x_n$) происходит следующим образом. Машина, начиная работать в состоянии $Q_0 = H(x)$, переходит последовательно в состояния $Q_1 = T(H(x))$, $Q_2 = T^{(2)}(H(x))$, ... и т. д. до тех пор пока для некоторого y $Q_y = T^{(y)}(H(x)) \in \mathfrak{F}$. Тогда результат применения функции выхода к заключительному состоянию $U(Q_y)$ есть значение функции $f(x)$.

Другими словами, $f(x) = U(T^{(t(x))}(H(x)))$, где $t(x) = \mu y [T^{(y)}(H(x)) \in \mathfrak{F}]$, $t(x)$ назовем временем работы (сигнализирующей времени t_M) машины M .

Определение 2. Арифметизацией машины M назовем $(\varphi, H_1, T_1, U_1, J)$, где φ есть взаимно-однозначное отображение $\mathcal{G}$ в N ; $H_1: N^n \rightarrow N$, $T_1: N \rightarrow N$, $U_1: N \rightarrow N$, $J: N \rightarrow \{1, 2\}$ — такие функции, что $\forall x \in N^n \quad H_1(x) = \varphi(H(x))$; $\forall z \in \varphi(\mathcal{G}) \quad T_1(z) = \varphi(T(\varphi^{-1}(z)))$ и $U_1(z) = U(\varphi^{-1}(z))$;

$$J(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \in \varphi(\mathfrak{F}), \\ 2, & \text{если } z \notin \varphi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Из определения следует, что $t_M(x) = \mu y [J(T_1^{(y)}(H_1(x)))]$ и $f(x) = U_1 \cdot (T_1^{(t_M(x))}(H_1(x)))$.

Будем говорить, что машина M ограниченно арифметизуема в классе функций $\mathfrak{E}$, если и только если машина M имеет арифметизацию (φ, H, T, U, J) такую, что $H, T, U, J \in \mathfrak{E}$ и $\exists g \in \mathfrak{E}, \forall y \leq t_M(x) [l(T^{(y)}(H(x))) \leq g(l(x), y)]$. Класс машин, ограниченно арифметизируемых в классе $\mathfrak{E}$, будем обозначать $A_0(\mathfrak{E})$.

Определение 3 (С. Кук ⁽³⁾). Функция $f(x)$ вычислима вычислителем, ограниченным во времени функцией $t(x)$, если существует м. Т., вычисляющая $f(x)$ за время $(t(x))^k$ для некоторой константы k .

Примерами вычислителей, ограниченных во времени, являются многоленточные м. Т., многомерные м. Т., итеративные сети, машины со свободным доступом к памяти в смысле Эрли ⁽³⁾.

Класс всех таких вычислителей обозначим CT . Класс CT имеет характеристику в терминах машин класса $A_0(\mathcal{T})$ с точностью до мультипликативной константы относительно времени вычисления машин данного класса. А именно, верна

Теорема 2. 1) Для всякой машины $M \in CT$, вычисляющей функцию $f(x)$ за время $t(x)$, найдется машина $M_1 \in A_0(\mathcal{T})$, вычисляющая $f(x)$ за время $t_1(x)$, где $t(x) \leq t_1(x) \leq 3 \cdot t(x)$.

2) $A_0(\mathcal{T}) \subseteq CT$.

С каждой машиной M из класса $A_0(\mathcal{T})$ будем связывать функцию φ , задающую арифметизацию (φ, H, T, U, J) машины M с функциями $H, T, U, J \in \mathcal{T}$, тогда определим сигнализирующую объема памяти машины $M - L_M$ посредством равенства

$$L_M(x) = \max_{0 \leq y \leq t_M(x)} [l(T^{(y)}(H(x)))].$$

Определение 4. Будем говорить, что функции f_1 и f_2 линейно (полиномиально) связаны, если существуют константы c_1, c_2, c_3, c_4 (полиномы $P_1(z), P_2(z)$) такие, что:

$$\begin{aligned} f_1(x) &\leq c_1 \cdot f_2(x) + c_2 & (f_1(x) \leq P_1(f_2(x))), \\ f_2(x) &\leq c_3 \cdot f_1(x) + c_4 & (f_2(x) \leq P_2(f_1(x))). \end{aligned}$$

Линейную (полиномиальную) связность будем обозначать l -связность (P -связность).

Назовем $\mathcal{L}$ -сигнализирующей (T -сигнализирующей) всякую вычислимую функцию f , для которой существует l -связная (P -связная) с f сигнализирующая памяти (времени).

Определение 5. Пару вычислимых функций (L, t) назовем точной парой $(\mathcal{L}, T)$ -сигнализирующих, если существует машина $M \in A_0(\mathcal{T})$ такая, что L_M и L l -связны, а t_M и t P -связны.

Введем отношение эквивалентности $\sim$ на множестве пар функций такое, что $(\psi_1, \psi_2) \sim (f_1, f_2)$, если функции ψ_1 и f_1 l -связны, а функции ψ_2 и f_2 P -связны.

Теорема 3. Существует функция $V \in \mathcal{T}$ такая, что:

1. Пара функций (L, t) является точной парой $(\mathcal{L}, T)$ -сигнализирующих тогда и только тогда, когда существует пара функций $(L_0, t_0) \sim (L, t)$ и $\exists i \in N$, такие, что

$$\begin{aligned} t_0(x) &= \mu y [V(i, x, 2^y) = y], \\ L_0(x) &= \max_{u \leq 2^{t_0(x)}} [l(V(i, x, u))]. \end{aligned}$$

2. Функция $G(x)$ вычислима с сигнализирующими времени $t(x)$ и памяти $L(x)$ тогда и только тогда, когда существует пара функций $(L_1, t_1) \sim (L, t)$, удовлетворяющая условию 1, и $\exists i \in N$ такие, что

$$G(x) = V(i, x, 2^{t_1(x)}) \quad \text{и} \quad L_1(x) = \max_{u \leq 2^{t_1(x)}} [l(V(i, x, u))].$$

Из теорем 2 и 3 вытекает

Следствие 1. 1. Функция $t(x)$ является сигнализирующей времени тогда и только тогда, когда существует $g \in \mathcal{T}$ такая, что

$$t(x) = \mu y(g(x, 2^y) = 0).$$

2. Функция $G(x)$ вычислима за время $t(x)$ тогда и только тогда, когда $t(x)$ удовлетворяет условию 1 и существует $F \in \mathcal{T}$ такая, что

$$G(x) = F(x, 2^{t(x)}).$$

Определим классы сложности при одновременном ограничении на объем памяти и время вычисления функций на машинах из класса $A_0(\mathcal{T})$: $K_{L,t} = \{f \mid \exists M \in A_0(\mathcal{T}), \exists k, m \in N \text{ (} M \text{ вычисляет } f(x) \text{) } L_M(x) \leq k \cdot L(x) \text{ \& } t_M(x) \leq (t(x))^m\}$.

Пусть

$$V^*(i, x, z, y) = \begin{cases} V(i, x, y), & \text{если } V(i, x, y) \leq z; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из определения $V^* \in \mathcal{T}$, так как согласно теореме 3 $V \in \mathcal{T}$.

Следствие 2. Если $L, t \in K_{L,t}$, то

$$\begin{aligned} K_{L,t} &= \{\lambda x V^*(i, x, 2^{m \cdot L(x)}, 2^{t^k(x)}); i, m, k \in N\} = \\ &= \{g(x), 2^{m \cdot L(x)}, 2^{t^k(x)}; m, k \in N, g \in \mathcal{T}\}. \end{aligned}$$

В заключение автор выражает благодарность Н. В. Петри за оказанную помощь в работе.

Московский государственный
педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
8 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

¹ D. B. Thompson, Mathematical Systems Theory, v. 6, N 1 (1972). ² R. M. Smullyan, Theory of Formal Systems, N 47 (1961). ³ S. A. Cook, J. Assoc. Comp. Math., v. 18, N 1 (1971).