

УДК 530.12:531.51+539.12:530.145.513 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Д. А. ПОПОВ, Л. И. ДАЙХИН

ПРОСТРАНСТВА ЭЙНШТЕЙНА И ПОЛЯ ЯНГА — МИЛЛСА

(Представлено академиком В. С. Владимировым 1 VII 1975)

Цель настоящей заметки — дать обобщение теории Янга — Миллса ^(1, 2) на неполупростые группы и на этом основании рассмотреть пространства Эйнштейна.

1. Свободные поля Янга — Миллса. Начнем с определений и одновременно установим связи ряда физических и математических терминов. Тройка (P, M, G) будет обозначать главное расслоение с базой M ($\dim M = n$), группой G , пространством расслоения P и проекцией $\pi: P \rightarrow M$. В физическом контексте M — пространство — время, G — калибровочная группа и $P = M \times G$. В этой работе тривиальность расслоения P не предполагается. Приведем инвариантное определение поля Янга — Миллса ⁽³⁻⁵⁾.

Определение 1. Полем Янга — Миллса (на многообразии M), отвечающем группе G , называется связность в некотором расслоении (P, M, G) .

Будем использовать задание связности с помощью 1-формы Ω на P (Ω — форма со значениями в алгебре Ли $\mathcal{L}(G)$ группы G) ^(6, 7). Через Φ обозначается форма кривизны связности Ω . По определению $\Phi = D\Omega$, $D = H \circ d$, где d — оператор внешнего дифференцирования, а H — оператор взятия горизонтальной части ^(6, 7).

Связь определения 1 с физическим определением ^(1, 2) устанавливается с помощью локальной проекции форм Ω и Φ на базу (детально эта связь обсуждается в работе ⁽⁵⁾). Локальная тривиализация P над $U \subset M$ (локальное сечение $s_U: U \rightarrow \pi^{-1}(U)$) дает возможность сопоставить произвольной форме Ψ на P форму Ψ_U на U ($\Psi_U = s_U^* \Psi$). Форма Ψ_U ниже называется локальной проекцией формы Ψ . Предполагая, что на U заданы координаты $\{x^\lambda\}$, запишем локальные проекции форм Ω и Φ в виде

$$\Omega_U = \sum_a X_a \otimes \theta_a^\alpha dx^\lambda, \quad \Phi_U = \sum_a X_a \otimes \sum_{\mu < \nu} \Phi_{\mu\nu}^\alpha dx^\mu \wedge dx^\nu;$$

здесь $\{X_a\}$ — базис в $\mathcal{L}(G)$, и набор функций $\{\theta_a^\alpha\}$ в физике называется полем Янга — Миллса. Обычно в физических работах предполагается, что группа G полупроста, а на M задана псевдориманова метрика $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$, и используется следующее

Определение 2 ^(1, 2). Свободным полем Янга — Миллса для полупростой группы G называется поле Янга — Миллса, являющееся экстремалю функционала

$$I = \int \Phi_{\mu\nu}^\alpha \Phi_{\alpha\beta}^\beta g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} K_{ab} \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} dx^1 \dots dx^n;$$

здесь $K_{ab} = f_{ad}^c f_{bc}^d$ — компоненты формы Киллинга на $\mathcal{L}(G)$ в базисе $\{X_a\}$, а f_{bc}^a — структурные константы в этом базисе. Уравнение экстремалей имеет вид ⁽²⁾

$$K_{rb} g^{\lambda\alpha} g^{\nu\beta} \nabla_\alpha \Phi_{\alpha\beta}^b - K_{ab} g^{\lambda\alpha} g^{\nu\beta} f_{rl}^a \theta_\nu^l \Phi_{\alpha\beta}^b = 0 \quad (1)$$

(∇_λ — ковариантная производная, отвечающая псевдоримановой связности). Величину $\Phi_{\mu\nu}{}^a\Phi_{\alpha\beta}{}^bg^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}K_{ab}$ будем называть лагранжианом Янга — Миллса. Заметим, что этот лагранжиан и уравнение (1) можно записать и для неполупростой (неабелевой) группы, но форма K_{ab} будет тогда вырожденной и использование ее в лагранжиане естественно только в случае полупростой группы.

В рассматриваемом случае, когда G полупроста, на M задана метрика g и на P есть связность Ω , возникает естественная правоинварантная метрика на P : на горизонтальных подпространствах это метрика, индуцированная метрикой базы, а на вертикальных — формой Киллинга ⁽⁵⁾. В этой метрике горизонтальные и вертикальные подпространства ортогональны. Как известно, если на многообразии задана метрика, то определен оператор δ , сопряженный с d ⁽⁷⁾. Используя для определения δ описанную выше метрику на P , введем оператор $\Delta = H \circ \delta$. В работе ⁽⁵⁾ доказана

Теорема 1. *Поле Янга — Миллса для полупростой группы G является свободным тогда и только тогда, когда $\Delta\Phi = 0$.*

Доказательство сводится к вычислению локальной проекции $(\Delta\Phi)_v$ формы $\Delta\Phi$

$$(\Delta\Phi)_v = \sum_a X_a \otimes (g^{\nu\lambda} \nabla_\lambda \Phi_{\lambda\mu}{}^a + f_{bc}{}^a g^{\nu\lambda} \theta_\lambda{}^b \Phi_{\nu\mu}{}^c) dx^\mu. \quad (2)$$

С этого момента откажемся от предположения о полупростоте группы G . Аналогично предыдущему введем метрику на P , но вместо формы Киллинга используем произвольную невырожденную билинейную форму на $\mathcal{L}(G)$ и снова введем оператор $\Delta = H \circ \delta$.

Лемма 1. *Форма $\Delta\Phi$ эквивариантна, горизонтальна и не зависит от выбора невырожденной билинейной формы на $\mathcal{L}(G)$.*

Теорема 1 и лемма 1 оправдывают введение следующего определения.

Определение 3. Поле Янга — Миллса Ω для произвольной группы Ли G называется свободным, если $\Delta\Phi = 0$.

В координатах условие $\Delta\Phi = 0$ имеет вид (см. (2))

$$g^{\nu\lambda} \nabla_\lambda \Phi_{\nu\mu}{}^a + f_{bc}{}^a g^{\nu\lambda} \theta_\lambda{}^b \Phi_{\nu\mu}{}^c = 0. \quad (3)$$

Определение 3 имеет смысл и в тех случаях, когда лагранжиан Янга — Миллса не существует (например, для абелевых групп), а для полупростых групп в силу теоремы 1 определение 3 совпадает с определением 2. Заметим, что для неполупростых групп уравнения (1) и (3), вообще говоря, не совпадают.

Обратим внимание на аналогию уравнения $\Delta\Phi = 0$ и тождества Бьянки $D\Phi = 0$ с системой уравнений Максвелла, которая получается при $G = U^1$. В этой связи, как отметил С. П. Новиков, уравнение $\Delta\Phi = 0$ естественно было бы назвать уравнением Максвелла — Янга — Миллса.

2. Применение к гравитации. Псевдориманову связность с нулевым тензором Риччи ($R_{ik} = 0$) будем называть эйнштейновской. Вопрос состоит в том, можно ли трактовать эйнштейновскую связность как поле Янга — Миллса в смысле определения 3.

С нашей точки зрения, трактовка гравитации как поля Янга — Миллса в работах ^(2, 8) не является естественной, так как вводимые в этих работах поля не являются связностями, а лагранжианы не являются лагранжианами Янга — Миллса. Работа ⁽⁸⁾ важна тем, что в ней указано на роль группы Пуанкаре (как калибровочной группы) при трактовке гравитации. Эта идея реализуется ниже. На проблему описания гравитационного поля как поля Янга — Миллса вновь обращено внимание в недавней работе Янга ⁽⁹⁾. В этой работе рассматривается лагранжиан Янга — Миллса для группы $GL(n, \mathbf{R})$, $n = \dim M$, и для гравитационного поля получено уравнение $\nabla_k R_{ij} = \nabla_j R_{ik}$, которое ниже называется уравнением Янга. Таким образом, если исходить из лагранжиана Янга — Миллса, то уравнение Эйнштейна $R_{ik} = 0$

не получается. Попробуем получить его, исходя из уравнения $\Delta\Phi=0$ для некоторого (P, M, G) .

Пусть $(P, M, G) = (L(M), M, GL(n, \mathbf{R}))$ — расслоение линейных реперов и $\Omega(g)$ — псевдориманова связность на $L(M)$. Координаты $\{x^k\}$ на $U \subset M$ задают локальное сечение s_U — координатный репер $\{\partial/\partial x^k\}$; отвечающая этому сечению локальная проекция формы $\Delta\Phi$ (для связности $\Omega(g)$) имеет вид

$$(\Delta\Phi)_U = \sum_{(mk)} X_{(mk)} \otimes g^{im} [\nabla_i R_{mk} - \nabla_k R_{mi}] dx^n, \quad (4)$$

где $\{X_{(mk)}\}$ — стандартный базис в алгебре матриц $\mathcal{L}(GL(n, \mathbf{R}))$, $(X_{mk})_{\alpha\beta} = \delta_{mk} \delta_{\alpha\beta}$. Таким образом, в этом случае уравнение $\Delta\Phi=0$ эквивалентно уравнению Янга.

Кроме $L(M)$ с многообразием M естественно связано расслоение аффинных реперов $(^6) (A(M), M, Af(n, \mathbf{R}))$, где $Af(n, \mathbf{R})$ — аффинная группа (полупрямое произведение $GL(n, \mathbf{R})$ на $\mathbf{R}^n$). Как линейное пространство $\mathcal{L}(Af(n, \mathbf{R}))$ есть прямая сумма $\mathcal{L}(GL(n, \mathbf{R})) \otimes \mathbf{R}^n$ и формы со значениями в $\mathcal{L}(Af(n, \mathbf{R}))$ записываются в виде $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$, где $\Psi_1 \in \mathcal{L}(GL(n, \mathbf{R}))$ -компонента, а $\Psi_2 \in \mathbf{R}^n$ -компонента формы Ψ . Связность Ω на $L(M)$ индуцирует картановскую связность $\bar{\Omega}$ на $A(M)$ $(^6)$. Это единственная связность на $A(M)$ такая, что $i^* \bar{\Omega} = (\Omega, \chi)$, где χ — форма смещения и $i: L(M) \rightarrow A(M)$ — редукция. Если s_U — локальный координатный репер в $L(M)$, то $\bar{s}_U = i^* s_U$ — локальное сечение $A(M)$ и $\bar{\Omega}_U = s_U^* \bar{\Omega} = (\Omega_U, \chi_U)$, $\bar{\Phi}_U = \bar{s}_U^* \Phi = (\Phi_U, 0)$ (предполагается, что Ω — связность без кручения). В координатах

$$\Omega_{\lambda}^{(mk)} = \Gamma_{\lambda k}^{mk}, \quad \Phi_{\nu\mu}^{(mk)} = R_{k\nu\mu},$$

$$\chi_U = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \otimes \chi_{\mu}^{\alpha} dx^{\mu}, \quad \chi_{\mu}^{\alpha} = \delta_{\mu}^{\alpha},$$

где $\Gamma_{\lambda k}^{mk}$ — символы Кристоффеля, $R_{k\nu\mu}$ — тензор кривизны, а e_{α} — стандартный базис в $\mathbf{R}^n$. Прямое вычисление дает

$$(\Delta\bar{\Phi})_U = ((\Delta\Phi)_U, (Ri)_U), \quad (5)$$

$$(Ri)_U = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \otimes (-1)^{n+1} g^{\alpha\lambda} R_{\lambda\mu} dx^{\mu}.$$

Таким образом, фактически доказана

Теорема 2. *Псевдориманова связность $\Omega(g)$ является эйнштейновской тогда и только тогда, когда индуцированная ею картановская связность $\bar{\Omega}$ удовлетворяет уравнению $\Delta\bar{\Phi}=0$.*

Таким образом, на классе картановских связностей на $A(M)$, индуцированных псевдоримановыми связностями на $L(M)$, уравнение $\Delta\Phi=0$ эквивалентно уравнению Эйнштейна $R_{ik}=0$ и теорема 2 дает возможность трактовать эйнштейновскую связность как свободное поле Янга — Миллса в смысле определения 3. Заметим, что вследствие (4), (5) уравнение для $\mathcal{L}(GL(n, \mathbf{R}))$ -компоненты совпадает с уравнением Янга и является следствием уравнения для $\mathbf{R}^n$ -компоненты, а $\mathbf{R}^n$ -компонента связности $\bar{\Omega}$ фиксирована. Это (вместе с отсутствием естественной метрики на $\mathcal{L}(Af(n, \mathbf{R}))$) создает трудности для лагранжевой трактовки теоремы 2.

По аналогии с уравнениями Максвелла в случае произвольной группы G уравнение для свободного поля Янга — Миллса должно иметь вид $\Delta\Phi = \mathcal{T}$; форму $\mathcal{T}$ естественно назвать током. С другой стороны, уравнения Эйнштейна в присутствии материи имеют вид $R_{ik} - 1/2 R g_{ik} = T_{ik}$ (T_{ik} — тензор энергии — импульса). Следующая простая теорема даст ответ на вопрос, поставленный С. П. Новиковым.

Теорема 3. Для любого тензора энергии — импульса T_{ik} существует ток $\mathcal{T}$ такой, что уравнения $\Delta\bar{\Phi}=\bar{\mathcal{T}}$ и $R_{ik}-1/2Rg_{ik}=T_{ik}$ эквивалентны.

Форма $\bar{\mathcal{T}}$ строится по тем же формулам, что и $(\Delta\bar{\Phi})_v$ с заменой R_{ik} на $P_{ik}=T_{ik}-1/2Tg_{ik}$.

Теорема 3 дает «максвелловскую» трактовку гравитации в присутствии материи.

Авторы благодарят чл.-корр. АН СССР С. П. Новикова, В. Н. Сушко за поддержку. Беседы с С. П. Новиковым способствовали лучшему пониманию многих вопросов, затронутых в этой работе, и в результате этих бесед первый вариант статьи подвергся коренной переработке. Авторы благодарят Д. В. Алексеевского, А. М. Виноградова и В. Л. Холопова за полезные замечания.

Поступило
26 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ C. N. Yang, R. L. Mills, Phys. Rev., v. 96, 104 (1954). ² R. Utiyama, Phys. Rev., v. 101, 1597 (1956). ³ H. Kerbrat-Lunc, Ann. Inst. H. Poincaré Sec. A, v. 13, № 4, 195 (1970). ⁴ Н. П. Коноплева, В. Н. Попов, Калибровочные поля, Атомиздат, 1972. ⁵ Д. А. Попов, Теоретич. и матем. физ., т. 24, № 3 (1975). ⁶ Р. А. Бишон, Р. Дж. Кригтенден, Геометрия многообразий, «Мир», 1967. ⁷ Чжень Шен-шенъ, Комплексные многообразия, ИЛ, 1961. ⁸ T. W. Kibble, J. Math. Phys., v. 2, 212 (1961). ⁹ C. N. Yang, Phys. Rev. Letters, v. 33, № 7, 445 (1974).