

Е. И. ПУСТЫЛЬНИК

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ В МАССИВАХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 22 IV 1975)

1. Теория интерполяции, позволяющая изучать любой линейный оператор одновременно на целом семействе пространств, заняла прочное место в современном функциональном анализе. Наряду с работами Гальярдо, Лионса, Кальдерона, Петре, посвященными абстрактным конструкциям интерполяционных пространств (см., например, ⁽¹⁾ и имеющуюся там библиографию), работами С. Г. Крейна и Е. М. Семенова, исследующими интерполяцию в произвольных симметричных пространствах ^(2, 3), особо отметим теорию шкал банаховых пространств, разработанную С. Г. Крейном и его участниками и подробно изложенную в ^(4, 5) (близкие идеи использовались также Кальдероном ⁽⁶⁾). Понятие шкалы оказывается применимым ко многим естественным семействам пространств, давно применяемым в анализе и имеющим достаточно наглядное аналитическое описание, что особенно полезно в приложениях.

Основным моментом обобщения понятия шкалы в данной статье является замена числового параметра произвольной неотрицательной функцией $\varphi(\lambda)$, непрерывной и неубывающей на $(0, \infty)$ вместе с $\varphi^*(\lambda) = \lambda/\varphi(\lambda)$; подобные функции мы будем ниже называть Φ -функциями.

2. Пусть E^0 и E^1 — два банаховых пространства, непрерывно вложенные в некоторое отделимое линейное топологическое пространство. Рассмотрим семейство банаховых пространств $\{E_\varphi\}$, индексами которых служат всевозможные Φ -функции и для которых $E^0 \cap E^1 \subset E_\varphi \subset E^0 + E^1$. Это семейство назовем массивом, если:

- а) из $\varphi(\lambda) \leq \psi(\lambda)$ следует $E_\psi \subset E_\varphi$ и $\|x\|_{E_\psi} \leq a \|x\|_{E_\varphi}$;
- б) $E_{k\varphi}$ эквивалентно E_φ для любой постоянной $k > 0$, причем

$$\|x\|_{E_{k\varphi}} \leq b(k) \|x\|_{E_\varphi};$$

- в) для любого $x \in E^0 \cap E^1$

$$\|x\|_{E_\varphi} \leq C(\varphi) \|x\|_{E^0 \cap E^1} \left(\frac{\|x\|_{E^1}}{\|x\|_{E^0}} \right). \quad (1)$$

Если при этом $E^0 = E_1$, $E^1 = E_\lambda$, то будем говорить, что массив соединяет E^0 и E^1 .

В приложениях удобно выделять массивы, обладающие некоторыми дополнительными свойствами. Назовем массив нормальным, если $a=1$, $b(k)=k$ и $C(\varphi)=1$ для всех вогнутых Φ -функций (для произвольных Φ -функций тогда $C(\varphi) \leq 2$). Если $E^0 \cap E^1$ плотно в E^0 и E^1 , то сопряженные пространства $E^{0'}$, $E^{1'}$ также образуют банахову пару. Массив $\{E_\varphi\}$, построенный по E^0 , E^1 , назовем правильным, если сопряженные пространства E_φ' образуют массив, построенный по $E^{0'}$, $E^{1'}$ (вместо сопряженных иногда удобно рассматривать двойственные пространства по каким-либо другим критериям двойственности).

Функцию $\varphi(\lambda)$ будем называть композицией $\varphi_0(\lambda)$, $\varphi_1(\lambda)$, если она представима в виде $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda)\theta[\varphi_1(\lambda)/\varphi_0(\lambda)]$, где θ — некоторая Ф-функция. Через $\{E_{\varphi_0, \varphi_1}\}$ будем обозначать отрезок массива, т. е. совокупность пространств из массива $\{E_\varphi\}$, индексами которых являются всевозможные композиции функций φ_0 , φ_1 . Массив назовем однородным, если любой его отрезок сам является массивом по отношению к крайним пространствам E_{φ_0} , E_{φ_1} , причем $C(\theta) \leq C$, где константа C общая для всех отрезков.

3. Приведем примеры массивов из функциональных пространств. Существует бесчисленное множество массивов, соединяющих пространства L_1 и L_∞ и составленных из симметричных пространств. Подобные массивы образуют, например, все пространства Марцинкевича M_φ или все пространства Лоренца Λ_φ с нормами

$$\|x\|_{M_\varphi} = \sup_{D \subset \Omega} \frac{\varphi(\text{mes } D)}{\text{mes } D} \int_D |x(t)| dt, \quad \|x\|_{\Lambda_\varphi} = \sup_{\|y\|_{M_\varphi} \leq 1} \left| \int_\Omega x(t)y(t) dt \right|,$$

если в качестве индекса брать фундаментальные функции пространства ⁽²⁾. В ⁽⁷⁾ показано, что определению массива удовлетворяет семейство всех пространств Орлича $L_M^* = L_{\varphi^*}$, где в качестве индекса вновь нужно брать фундаментальную функцию $\varphi(\lambda) = \lambda N^{-1}(1/\lambda)$, где функция N дополнительная к M . Все три перечисленных массива нормальные, правильные и однородные.

Из несимметричных отметим всевозможные массивы пространств с весом; например, пространства $L_{1, \varphi(\rho)}$ с нормами $\|x\| = \int_\Omega |x(t)| \varphi[\rho(t)] dt$ образуют массив, соединяющий L_1 и $L_{1, \rho}$. Укажем еще массив из обобщенных пространств Гёльдера H_φ с нормами

$$\|x\|_{H_\varphi} = \sup_{t, \tau} \varphi \left(\frac{1}{|t - \tau|} \right) |x(t) - x(\tau)|,$$

где функции, отличающиеся на константу, отождествляются.

В определение нормы подавляющего большинства используемых в анализе пространств в той или иной форме входит возведение в некоторую степень $\alpha \in (0, 1)$; это α служит параметром, позволяющим объединять подобные пространства в шкалы. Заменяя возведение в степень произвольной Ф-функцией, удастся в большинстве случаев расширить первоначальную шкалу до целого массива пространств со значительно большей детализацией свойств изучаемых функций. Таким путем можно строить различные массивы пространств дифференцируемых функций типа Соболева — Орлича, массивы гильбертовых пространств и т. п.

4. Для любой банаховой пары E^0 , E^1 с ненулевым пересечением нетрудно построить хотя бы один массив: достаточно, например, положить $\|x\|_{E_\varphi} = \varphi(1) \|x\|_{E^0 + E^1}$, $x \in E^0 \cap E^1$. Другим (нетривиальным) примером служит массив $\{G_\varphi\}$ с нормами

$$\|x\|_{G_\varphi} = \sup \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E^0}} \varphi \left(\frac{\|f\|_{E^{0'}}}{\|f\|_{E^{1'}}} \right), \quad x \in E^0 \cap E^1, \quad (2)$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функционалам $f \in E^{0'} \cap E^{1'}$. Массив $\{G_\varphi\}$ является нормальным и однородным, а в случае плотности $E^0 \cap E^1$ в E^0 и E^1 — правильным. В последнем случае $E^{0'} \cap E^{1'} = (E^0 + E^1)'$, поэтому массив $\{G_\varphi\}$ соединяет E^0 и E^1 , если

$$\|x\|_{E^0} = \sup_{f \in (E^0 + E^1)'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E^{0'}}}, \quad \|x\|_{E^1} = \sup_{f \in (E^0 + E^1)'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E^{1'}}},$$

т. е. пространство $(E^0 + E^1)$ должно быть нормативным в $E^{0'}$ и $E^{1'}$. С. Г. Крейн и Ю. И. Петунин назвали такие пространства E^0, E^1 родственными и показали ⁽⁴⁾, что необходимым и достаточным условием родственности является замкнутость шаров E^0 и E^1 в топологии $E^0 + E^1$.

При условии плотности $E^0 \cap E^1$ в E^0 и E^1 массив $\{G_\Phi\}$ обладает еще двумя важными свойствами, которые сформулируем в виде теорем.

Теорема 1. Пусть $\{F_\Phi\}$ — правильный массив, построенный по E^0, E^1 , причем для массива $\{F_\Phi\}$ известен функционал $C(\Phi)$ из неравенства (1)

Тогда $\|x\|_{G_\Phi} \leq C(\Phi) \|x\|_{F_\Phi}, x \in E^0 \cap E^1$.

Теорема 2 (интерполяционная). Пусть $F^0 \cap F^1$ плотно в F^0 и F^1 и пусть $\{F_\Phi\}$ — правильный массив, построенный по F^0 и F^1 . Если определенный на $F^0 + F^1$ линейный оператор A удовлетворяет неравенствам

$$\|Ax\|_{E^0} \leq m \|x\|_{F^0}, \quad \|Ax\|_{E^1} \leq m \|x\|_{F^1}, \quad x \in F^0 \cap F^1, \quad (3)$$

то он ограничен как оператор из F_Φ в G_Φ и норма его не превосходит $mC(\Phi)$, где $C(\Phi)$ то же, что и в теореме 1.

Теорема 1 показывает, что массив $\{G_\Phi\}$ является, в известном смысле, минимальным среди всех правильных массивов, построенных по двум данным пространствам. Можно показать, что пространства Марцинкевича образуют минимальный массив, соединяющий L_1 и L_∞ , пространства Гельдера образуют минимальный массив, соединяющий H_1 и H_λ , так что для этих двух массивов справедлива интерполяционная теорема.

5. Пусть $E^0 \cap E^1$ плотно в E^0 и E^1 и $\{E_\Phi\}$ — произвольный нормальный массив. Без ограничения общности можно считать, что $\Phi(1) = 1$, поэтому $\|x\|_{E_\Phi} \leq \|x\|_{E^0 \cap E^1}$, т. е. существует $\sup \|x\|_{E_\Phi}$ по всем нормальным массивам для каждого $x \in E^0 \cap E^1$ и каждой Φ -функции $\Phi(\lambda)$. Эта верхняя грань обладает всеми свойствами нормы и как таковая определяет некоторый массив, который естественно назвать **максимальным**.

Любой максимальный массив является правильным и непрерывным «сверху», т. е. $\|x\|_{E_{\Phi_n}} \rightarrow \|x\|_{E_\Phi}$, если $\Phi_n(\lambda) \leq \Phi(\lambda)$ и $\Phi_n(\lambda) \rightarrow \Phi(\lambda)$ при всех λ . В частности, отрезок $\{\Lambda_{\Phi_0, \Phi_1}\}$ есть максимальный массив, соединяющий пространства Лоренца Λ_{Φ_0} и Λ_{Φ_1} .

Если $E^{0'} \cap E^{1'}$ также плотно в $E^{0'}$ и $E^{1'}$, то можно установить определенные соотношения двойственности между минимальными и максимальными массивами, построенными по E^0, E^1 и $E^{0'}, E^{1'}$.

Теорема 3. Пусть $\{E_\Phi\}$ — минимальный массив, построенный по E^0, E^1 , тогда $\{E_{\Phi'}\}$ — максимальный массив, построенный по $E^{0'}, E^{1'}$.

И, наоборот, если $\{E_{\Phi'}\}$ — максимальный массив, то $\{E_{\Phi'}\}$ минимальный.

Отсюда, в частности, вытекает критерий однородности максимального массива: для этого необходимо и достаточно, чтобы любой отрезок минимального массива, построенного по сопряженным пространствам, сам был минимальным массивом.

Теорема 4 (интерполяционная). Пусть $\{F_\Phi\}$ — максимальный массив, построенный по F^0, F^1 , а $\{E_\Phi\}$ — произвольный нормальный массив, построенный по E^0, E^1 . Если определенный на $F^0 + F^1$ линейный оператор A удовлетворяет неравенствам (3), то он ограничен как оператор из E_Φ в E_Φ и норма его не превосходит m .

Для любого промежуточного между E^0 и E^1 пространства G , на котором

$$\|x\|_G \leq \|x\|_{E^0} \Phi_0(\|x\|_{E^1} / \|x\|_{E^0}), \quad x \in E^0 \cap E^1, \quad (4)$$

можно построить нормальный массив, в котором $E_{\Phi_0} = G$, поэтому неравенства (3) и (4) достаточны для ограниченности A как оператора из F_{Φ_0} в G . Подобным путем можно, например, доказать следующую теорему.

Теорема 5. Пусть Φ -функции $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ и их композиция $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)\theta[\beta(\lambda)/\alpha(\lambda)]$ удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\lambda\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)} \leq m_1 < m_2 \leq \frac{\lambda\gamma'(\lambda)}{\gamma(\lambda)} \leq m_3 < m_4 \leq \frac{\lambda\alpha'(\lambda)}{\alpha(\lambda)},$$

где m_i — некоторые постоянные из $(0, 1)$. Пусть $\varphi_0(\lambda)$, $\varphi_1(\lambda)$ — произвольные Φ -функции и $\varphi(\lambda) = \varphi_0(\lambda)\theta[\varphi_1(\lambda)/\varphi_0(\lambda)]$.

Тогда любой линейный оператор, ограниченный как оператор из Λ_{φ_0} в M_α и из Λ_{φ_1} в M_β , может быть продолжен по непрерывности в ограниченный оператор, действующий из Λ_φ в пространство Орлича L_γ^* .

6. Для получения интерполяционных теорем в массивах банаховых пространств удобно использовать общий принцип максимальности, согласно которому рассматриваются лишь массивы, обладающие некоторым фиксированным свойством, и при каждом φ берется верхняя грань норм по всем таким массивам. Пусть $\{F_\varphi\}$ — построенный таким способом квазимаксимальный массив, а $\{E_\varphi\}$ — произвольный массив с тем же свойством. Оператор A (не обязательно аддитивный), ограниченно действующий из F^i в E^i , $i=0, 1$, будет ограничен как оператор из F_φ в E_φ , если семейство норм

$$\|x\|_{E_\varphi} = \max \left\{ \frac{1}{m} \|Ax\|_{E_\varphi}, \|x\|_{F_\varphi} \right\}, \quad x \in F^0 \cap F^1, \quad (5)$$

порождает массив с тем же самым заранее фиксированным свойством. Применение этого принципа сводится к конструированию свойства, при котором намеченный массив становится максимальным, и последующему выделению допустимого класса операторов A .

Удается выделить свойство, при котором квазимаксимальный массив, соединяющий два пространства Орлича, сам состоит из пространств Орлича. А именно, нужно рассматривать массивы функциональных пространств, для которых из

$$\|x_0\|_{E^0} \leq 1, \|x_0\|_{E^1} \leq 1, |x(t)| \leq |x_0(t)\varphi(|x_1(t)|/|x_0(t)|)$$

следует $\|x\|_{E_\varphi} \leq 1$. Массив с нормами (5) будет обладать таким же свойством, если оператор A однородный, монотонный и выпуклый на конусе неотрицательных функций (для линейных операторов все это вытекает из положительности на том же конусе). Таким образом, для указанных операторов справедлива теорема интерполяции.

Теорема 6. Пусть A — оператор описанного выше типа, ограниченно действует из $L_{\varphi_i}^*$ в $L_{\psi_i}^*$, $i=0, 1$, и нормы его не превосходят m .

Тогда для любых однотипных композиций $\varphi = \varphi_0\theta(\varphi_1/\varphi_0)$, $\psi = \psi_0\theta(\psi_1/\psi_0)$ оператор A действует из L_φ^* в L_ψ^* и норма его не превосходит m .

Автор благодарит С. Г. Крейна и В. И. Овчинникова за полезное обсуждение данной работы.

Воронежский технологический институт

Поступило
20 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Э. Маджenes, УМН, т. 21, в. 2, 169 (1966). ² Е. М. Семенов, ДАН, т. 164, № 4, 746 (1965). ³ С. Г. Крейн, Е. М. Семенов, Функциональный анализ и его приложения, т. 7, в. 2, 89 (1973). ⁴ С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, УМН, т. 21, в. 2, 89 (1966). ⁵ С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, Тр. Московск. матем. общ., т. 17, 293 (1967). ⁶ А. П. Кальдерон, Сб. пер., Математика, т. 9 (3), 56 (1965). ⁷ Е. И. Пустыльник, В сб.: Сингулярные дифференциальные операторы и их собственные функции, Воронеж, 1974, стр. 69.