

УДК 517.948.324

МАТЕМАТИКА

З. ПРЕСДОРФ, Б. ЗИЛЬБЕРМАН

О СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РЕДУКЦИИ И КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 19 VII 1975)

В заметке исследуется применимость и скорость сходимости методов редукции и коллокации для систем сингулярных интегральных уравнений по единичной окружности как нормального, так и ненормального типа ⁽¹⁾.

1°. В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений: C^m ($m \geq 0$ — целое число) — пространство (комплекснозначных) функций, непрерывных на единичной окружности Γ_0 вместе с производными до порядка m включительно; $C^{m, \mu}$, $0 < \mu \leq 1$, — пространство всех функций из C^m , для которых m -я производная на Γ_0 удовлетворяет условию Гёльдера с показателем μ ; W_p^m , $1 < p < \infty$, — пространство 2π -периодических функций на вещественной оси, абсолютно непрерывных вместе с производными до порядка $m-1$, для которых m -я производная абсолютно суммируема в p -й степени; при $m=0$ будем писать $C=C^0$, $H^\mu=C^{0, \mu}$, $L^0=W_p^0$. Все перечисленные пространства являются банаховыми в своей естественной норме (см., например, ⁽²⁾).

Через $W_p^{m, \mu}$ будем обозначать совокупность всех функций из W_p^m , m -я производная которых удовлетворяет условию Гёльдера с показателем μ , если оценивать ее приращение в норме L^p (см. ⁽¹⁾). При $\mu=0$ положим $W_p^{m, 0}=W_p^m$, $C^{m, 0}=C^m$.

Пусть, наконец, R — класс 2π -периодических функций, ограниченных и интегрируемых по Риману.

Если X — линейное пространство, то всюду в дальнейшем через $X_{(n)}$, $n=1, 2, \dots$, будем обозначать совокупность всех n -мерных векторов с компонентами из X , а через $X_{(n \times n)}$ — совокупность всех квадратных матриц порядка n с элементами из X . Если X — банахово пространство, то $X_{(n)}$ становится банаховым пространством, если за норму принять сумму норм компонент.

2°. Рассмотрим теперь систему сингулярных интегральных уравнений вида

$$A\varphi \equiv c(t)\varphi(t) + \frac{d(t)}{\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + T\varphi = f(t) \quad (t \in \Gamma_0) \quad (1)$$

в пространствах $L_{(m)}^p$, $1 < p < \infty$, $m \geq 1$, и $H_{(m)}^\mu$, $0 < \mu < 1$, где $a(t) = c(t) + d(t)$, $b(t) = c(t) - d(t)$ — матрицы-функции из класса $H_{(m \times m)}^\mu$, а T — линейный вполне непрерывный оператор.

Для метода редукции решения системы (1) в нормальном случае имеют место следующие две теоремы, в которых через f_j и a_j , b_j , c_{jk} ($j, k=0, \pm 1, \dots$) обозначены соответственно коэффициенты Фурье вектор-функции $f(t)$ и матриц-функций $a(t)$, $b(t)$, Tt^k .

Теорема 1. Пусть $a(t)$ и $b(t)$ — матрицы-функции из класса $H_{(m \times m)}^\mu$; $0 < \mu < 1$, для которых выполнены следующие условия:

- 1) $\det a(t) \neq 0, \det b(t) \neq 0 \ (t \in \Gamma_0)$;
- 2) левые частные индексы $* a(t)$ равны нулю;
- 3) правые частные индексы матриц-функций $b(t)$ и $b^{-1}(t)a(t)$ равны нулю.

Если T — вполне непрерывный оператор в пространстве $L_{(m)}^p, 1 < p < \infty$, и $\dim \ker A = 0$, тогда система

$$\sum_{k=0}^n a_{j-k} \xi_k + \sum_{k=-n}^{-1} b_{j-k} \xi_k + \sum_{k=-n}^n c_{jk} \xi_k = f_j, \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \quad (2)$$

начиная с некоторого n , имеет единственное решение $\{\xi_k^{(n)}\}_{k=-n}^n$, а вектор-функции

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=-n}^n t^k \xi_k^{(n)} \quad (3)$$

сходятся при $n \rightarrow \infty$ по норме $L_{(m)}^p$ к решению $\varphi \in L_{(m)}^p$ системы (1), какова бы ни была вектор-функция $f \in L_{(m)}^p$.

Если $a(t), b(t) \in C_{(m \times m)}^{r, \lambda}, f \in W_{p(m)}^{r, \nu}$ и $T: L_{(m)}^p \rightarrow W_{p(m)}^{r, \nu} \ (r \geq 0, 0 \leq \nu < 1)$ тогда справедлива оценка

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{L_{(m)}^p} = O(n^{-\tau-\lambda}), \quad \lambda = \min(\mu, \nu). \quad (4)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Если T — вполне непрерывный оператор из $H_{(m)}^\nu$ в $H_{(m)}^\mu, 0 < \nu < \mu < 1$, и $\dim \ker A = 0$, тогда система (2), начиная с некоторого n , имеет единственное решение, а функции (3) сходятся при $n \rightarrow \infty$ по норме $H_{(m)}^\nu$ к решению $\varphi \in H_{(m)}^\nu$ системы (1), какова бы ни была вектор-функция $f \in H_{(m)}^\lambda$. При этом

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{H_{(m)}^\nu} = O(\ln n / n^{\mu-\nu}). \quad (5)$$

Если $a(t), b(t) \in C_{(m \times m)}^{r, \lambda}, f \in C_{(m)}^{r, \lambda} \ (r \geq 0)$ и $T: H_{(m)}^\nu \rightarrow C_{(m)}^{r, \lambda}$, тогда справедлива оценка

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{H_{(m)}^\nu} = O(\ln n / n^{r+\mu-\nu}). \quad (6)$$

З а м е ч а н и е. При более ограничительных условиях и без оценки (4) теорема 1 была получена в (3). В (4^{б, в}) была установлена теорема 2 с более грубыми оценками погрешности ($\ln^4 n$ вместо $\ln n$).

Обратимся теперь к коллокационному методу для системы (1) с узлами

$$t_j = \exp(2\pi i j / (2n+1)), \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm n. \quad (7)$$

Теорема 3. Пусть $a(t)$ и $b(t)$ — матрицы-функции класса $H_{(m \times m)}^\lambda, 0 < \mu < 1$, и выполнены следующие условия:

- 1) $\det a(t) \neq 0, \det b(t) \neq 0, t \in \Gamma_0$;
- 2) левые и правые частные индексы матрицы-функции $b^{-1}(t), a(t)$ равны нулю.

Если T — вполне непрерывный оператор из $L_{(m)}^p, 1/\mu < p < \infty$, в пространство $C_{(m)}$ и $\dim \ker A = 0$, тогда система

$$a(t_j) \sum_{k=0}^n t_j^k \xi_k + b(t_j) \sum_{k=-n}^{-1} t_j^k \xi_k + \sum_{k=-n}^n d_{jk} \xi_k = f(t_j), \quad (8)$$

$$j = 0, \pm 1, \dots, \pm n,$$

* Определение частных индексов см. в (4, 3).

где $d_k = (Tt^k)(t_j)$, $j, k=0, \pm 1, \dots$, начиная с некоторого n , имеет единственное решение $\{\xi_k^{(n)}\}_{k=-n}^n$, и вектор-функции (3) сходятся при $n \rightarrow \infty$ по норме $L_{(m)}^p$ к решению $\varphi \in L_{(m)}^p$ системы (1), какова бы ни была вектор-функция $f \in R_{(m)}$.

Если $a(t), b(t) \in C_{(m \times m)}^{r, \mu}$, $f \in C_{(m)}^{r, \nu}$ и $T: L_{(m)}^p \rightarrow C_{(m)}^{r, \nu}$ ($r \geq 0$, $0 \leq \nu < 1$), тогда справедлива оценка (4).

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда справедливо утверждение теоремы 2 относительно системы (8) (вместо системы (2)).

Замечание 1. В (4a, b) доказана теорема 4 с более грубыми оценками погрешности ($\ln^3 n$ вместо $\ln n$). В случае $m=1$ результаты, близкие к теореме 4, получены в (5, 6).

Замечание 2. Теоремы 3 и 4 остаются в силе, если вместо узлов (7) рассматривать узлы $t_j = \exp(\pi i j/n)$, $j=0, 1, \dots, 2n-1$.

3°. Рассмотрим теперь систему (1) в ненормальном случае, когда определитель $\det a(t)$ имеет на Γ_0 конечное число нулей α_j , $j=1, \dots, r$, целых кратностей m_j , а функция $\det b(t)$ имеет на Γ_0 нули β_k , $k=1, \dots, s$, целых кратностей n_k . Если матрицы-функции $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют некоторым условиям гладкости в точках α_j и β_k , то их можно представить в виде (см. (2), гл. 8)

$$a(t) = A(t) D_-(t) R_-(t), \quad b(t) = B(t) D_+(t) R_+(t). \quad (9)$$

Здесь $D_{\pm}(t)$ означают диагональные матрицы вида

$$D_-(t) = \left\{ \prod_{k=1}^r (t^{-1} - \alpha_k^{-1})^{\mu_j^{(k)}} \delta_{jl} \right\}, \quad D_+(t) = \left\{ \prod_{k=1}^s (t - \beta_k)^{\nu_j^{(k)}} \delta_{jl} \right\}_{j,l=1}^m;$$

$\mu_1^{(k)} \geq \mu_2^{(k)} \geq \dots \geq \mu_m^{(k)} \geq 0$, $k=1, \dots, r$, $\nu_1^{(k)} \geq \nu_2^{(k)} \geq \dots \geq \nu_m^{(k)} \geq 0$, $k=1, \dots, s$, целые числа, $R_{\pm}(t)$ — матрицы, полиномиальные относительно $t^{\pm 1}$, с постоянным и отличным от нуля определителем, а $A(t), B(t)$ — матрицы-функции, определители которых всюду на Γ_0 отличны от нуля. Положим

$$\kappa = \max(\mu_1^{(1)}, \dots, \mu_1^{(r)}, \nu_1^{(1)}, \dots, \nu_1^{(s)}).$$

Очевидно, что $\kappa \leq \rho = \max(m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_s)$.

Теорема 5. Пусть заданы представления (9), причем $A(t)$ и $B(t)$ из класса $C_{(m \times m)}^{\kappa, \mu}$, $0 < \mu < 1$ *, левые частные индексы матрицы-функции $A(t)$ равны нулю и правые частные индексы матрицы-функции $B(t)$ равны нулю. Пусть далее T — вполне непрерывный оператор из $L_{(m)}^p$, $1 < p < \infty$, в $W_{p(m)}^{\kappa}$ и $\dim \ker A = \dim \ker A_0 = 0$ **. Тогда система (2), начиная с некоторого n , имеет единственное решение и вектор-функции (3) сходятся при $n \rightarrow \infty$ по норме $L_{(m)}^p$ к решению $\varphi \in L_{(m)}^p$ системы (1), какова бы ни была вектор-функция $f \in W_{p(m)}^{\kappa}$.

Если $A(t), B(t) \in C_{(m \times m)}^{\kappa+r, \mu}$, $f \in W_{p(m)}^{\kappa+r}$, $r > 0$, и $T: L_{(m)}^p \rightarrow W_{p(m)}^{\kappa+r}$, тогда справедлива оценка

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{L_{(m)}^p} = O(n^{-r}).$$

Теорема 6. Пусть заданы представления (9), причем $A(t)$ и $B(t)$ из класса $C_{(m \times m)}^{\kappa+1}$ и левые частные индексы матрицы-функции $B^{-1}(t)A(t)$

* Для этого достаточно, например, чтобы $a(t), b(t) \in C_{(m \times m)}^{\kappa+\mu, \mu}$.

** Через A_0 обозначим характеристическую часть оператора A (т. е. $A_0 = A$ при $T=0$).

равны нулю. Пусть T — вполне непрерывный оператор из $L_{(m)}^p$, $1 < p < \infty$, в $C_{(m)}^{\kappa, \mu}$, $0 < \mu < 1$, и $\dim \ker A = \dim \ker A_0 = 0$.

Тогда система (8), начиная с некоторого n , имеет единственное решение и вектор-функции (3) сходятся при $n \rightarrow \infty$ по норме $L_{(m)}^p$ к решению $\varphi \in L_{(m)}^p$ системы (1), какова бы ни была вектор-функция $f \in C_{(m)}^{\kappa, \mu}$. При этом

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{L_{(m)}^p} = O(n^{-\mu}).$$

Если $A(t), B(t) \in C_{(m \times m)}^{\kappa+r, \mu}$, $f \in C_{(m)}^{\kappa+r, \mu}$, $r > 0$, и $T: L_{(m)}^p \rightarrow C_{(m)}^{\kappa+r, \mu}$, тогда справедлива оценка (4) при $\lambda = \mu$.

Все результаты настоящей заметки можно вывести из общих теорем сходимости проекционных методов. Для метода редукции и метода Галеркина решения уравнений в свертках (см. (3)) могут быть сформулированы результаты, аналогичные теоремам 1 и 5.

Политехнический институт
Карл-Маркс-Штадт, ГДР

Поступило
30 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. И. Мухелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968.
- ² S. Pröbldorf, Einige Klassen singulärer Gleichungen, Berlin, 1974. ³ П. И. Гохберг, И. А. Фельдман, Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, М., 1971.
- ⁴ В. А. Золотаревский, Математич. иссл., а) т. 9, в. 1, 56 (1974); б) т. 9, в. 2, 38 (1974); в) т. 9, в. 3, 82 (1974). ⁵ В. В. Иванов, Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений, Киев, 1968.
- ⁶ Б. Г. Габдулхаев, ДАН, т. 179, № 2, 260 (1968). ⁷ P. L. Butzer, R. J. Nessel, Fourier Analysis and Approximation, v. 1, Basel und Stuttgart, 1971.