

А. М. ЧЕБОТАРЕВ

***T*-ОТОБРАЖЕНИЯ И КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ**

(Представлено академиком В. С. Владимировым 4 VII 1975)

1. Теория распространения электромагнитного излучения в средах со случайными параметрами дает простейшие примеры фейнмановских континуальных интегралов, не представляющих решения каких-либо априорно известных уравнений ^(7, 8) *. При этом континуальный интеграл используется как объект, непосредственно описывающий эволюцию процесса. Аналогичную роль может играть и *T*-отображение ^(2, 3). Посредством *T*-отображений можно представить решения нелинейных уравнений Власова, Хартри, а также фейнмановские континуальные интегралы из ^(7, 8), о которых только что шла речь.

2. В конструкции *T*-отображения участвуют функционал и нелинейные операторы. Рассмотрим сначала алгебру финитных функционалов β , определенных на множестве $\lambda_t = \{x_\tau: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n, x_\tau \text{ — измеримая ограниченная функция параметра } \tau \in [0, t] \text{ со значениями в } \mathbb{R}^n\}$;

$$\beta = \left\{ f_l: \lambda_t \rightarrow \mathbb{C}, f_l(x_\tau) = f_0 + \sum_{i=1}^m \int_0^t \dots \int_0^t ds_1 \dots ds_i \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} dp \times \right. \\ \left. \times \exp i \sum x_{s_j} p_j f_i(p_1, \dots, p_i; s_1, \dots, s_i), m < \infty \right\},$$

где f_l — непрерывные функции параметров $s_1, \dots, s_i \in [0, t]$ со значениями в $C_0^\infty(\mathbb{R}^{nl})$. Учитывая, что индекс l однозначно определяет размерность пространств, которым принадлежат аргументы функции f_l , обозначим $s = (s_1, \dots, s_i)$, $p = (p_1, \dots, p_i) \in \mathbb{R}^{ni}$ и будем писать

$$f_l(x_\tau) = f_0 + \sum \int ds \int dp f_l(p, s) \exp i p x(s),$$

опуская пределы интегрирования и индекс суммирования.

Алгебраические операции в β определены естественным образом:

$$(\lambda f_l + \mu \varphi_l)(x_\tau) = \lambda f_l(x_\tau) + \mu \varphi_l(x_\tau), \quad f_l \varphi_l(x_\tau) = f_l(x_\tau) \varphi_l(x_\tau). \quad (1)$$

Пусть $c \geq 1$ и $\rho \geq 0$. Пополним линейное пространство β по норме

$$\|f_l\| = |f_0| + \sum c^i \int ds \int dp |f_l(p, s)| \prod (1 + |p_j|)^\rho; \quad (2)$$

пополнение обозначим через $\mathcal{B}(c, \rho)$.

Л е м м а 1. $\mathcal{B}(c, \rho)$ — банахова алгебра с операциями (1).

Приведем п р и м е р. Пусть $R(x, y, s, \tau)$ — непрерывная функция пара-

* В ⁽⁷⁾ со ссылкой на ⁽⁶⁾ приводится нестрогий вывод уравнения (9.7) для континуального интеграла (9.1). Техника, развиваемая в настоящей заметке, позволяет доказать, что, к сожалению, интеграл (9.1) не является решением указанного уравнения.

метров $s, \tau \in [0, t]$ со значениями в $H_{2\rho+n+1}(\mathbf{R}^{2n})$. Тогда функционал (см. (7-10))

$$f_t(x_\tau) = \exp \int_0^t \int_0^t R(x_\tau, x_s, \tau, s) d\tau ds$$

принадлежит $\mathcal{B}(c, \rho)$ при всех $c \geq 1$.

Обозначим через $I(c, \rho)$ подмножество элементов алгебры $\mathcal{B}(c, \rho)$, состоящее из функционалов, обращающихся в нуль на множестве λ_i .

Л е м м а 2. $I(c, \rho)$ — идеал банаховой алгебры $\mathcal{B}(c, \rho)$. Функционал $f_i \in \mathcal{B}(c, \rho)$ принадлежит $I(c, \rho)$, если и только если его значения на C^∞ -дифференцируемых или ступенчатых функциях из λ_i равны нулю.

Пусть π_N — разбиение отрезка $[0, t]$ на N частей точками $\{t_k\}_{k=1}^{N-1}$ и $\|\pi_N\| = \max |t_k - t_{k-1}|$. Если $\{\pi_N\}$ — последовательность разбиений, то мы предполагаем, что $\|\pi_N\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Функционалу f_i и разбиению π_N сопоставим функцию $f_i^{(N)}(x)$, $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^{nN}$, по правилу

$$f_i^{(N)}(x) = f_i(x_{\tau, N}), \quad x_{\tau, N} = \{x_1, 0 \leq \tau < t_1; \dots; x_N, t_{N-1} \leq \tau \leq t\}. \quad (3)$$

Если $f_i \in \mathcal{B}(c, \rho)$, то функции $f_i^{(N)}$ являются элементами банаховой алгебры $\mathcal{B}_\rho(\mathbf{R}^{nN})$, введенной в (4) для исчисления функций от конечного числа некоммутирующих операторов. Выберем в $\mathcal{B}_\rho$ эквивалентную норму так, чтобы $\|1\|_{\mathcal{B}_\rho} = 1$.

Л е м м а 3. Если $f_i \in \mathcal{B}(c, \rho)$, то $\|f_i^{(N)}\|_{\mathcal{B}_\rho} \leq \|f_i\|_{\mathcal{B}(1, \rho)}$.

3. Рассмотрим теперь три семейства операторов. Обозначим через $K(s, \tau)$ непрерывное квазиограниченное семейство операторов, действующих в банаховом пространстве $\mathbf{B}$: $K(s, \tau') \circ K(\tau', \tau) = K(s, \tau)$, $\lim_{s \rightarrow \tau} K(s, \tau) \psi = \psi$, $\|K(s, \tau)\|_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}} \leq \exp \sigma_1(s - \tau)$, $s \geq \tau$, а через $A(\cdot, \tau)$ и $c_j(\cdot, \tau)$, $1 \leq j \leq n$, — зависящие от параметра $\tau \in [0, t]$ нелинейные операторы, отображающие $\mathbf{B}$ в множество линейных операторов. Пусть оператор A обладает следующими тремя свойствами (3):

(I) липшиц-непрерывен по первому и непрерывен по второму аргументу: $\|A(u, \tau) - A(u', \tau')\|_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}} \leq \alpha_1(\|u\|, \|u'\|)(\|u - u'\| + \alpha_2(\tau - \tau'))$, где α_i — непрерывные функции, причем $\alpha_2(0) = 0$;

(II) локально ограничен: $\|A(u, \tau)\|_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}} \leq \alpha_3(\|u\|)$;

(III) полугруппа, порождаемая оператором $A(u, \tau)$, равномерно ограничена $\|\exp A(u, \tau)s\| \leq \exp \sigma_2 s$, $s > 0$.

Предположим, что операторы $C_1, \dots, C_n$:

а) коммутируют при фиксированных τ и u ;

б) образуют в смысле (4) производящий набор степени ρ , т. е. порождают непрерывное семейство ограниченных операторов

$$U_p(u, \tau) = \exp iC(u, \tau)p, \quad C = (C_1, \dots, C_n), \quad p = (p^1, \dots, p^n) \in \mathbf{R}^n, \\ \|U_p(u, \tau)\|_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}} \leq c(1 + |p|)^\rho;$$

в) $\|U_p(u, \tau) - U_p(u', \tau')\| \leq g_1(\|u\|, \|u'\|)(\|u - u'\| + g_2(\tau - \tau'))(1 + |p|)^\rho$, где g_1, g_2 — непрерывные функции, $g_2(0) = 0$.

4. Обозначим $\delta_i = t_i - t_{i-1}$, где $\{t_i\}_{i=1}^{N-1}$ — точки разбиения π_N , и зададим в банаховом пространстве $\mathbf{B}$ рекуррентную последовательность

$$\psi_N(t_i) = \left[f_i^{(N)}(\dot{C}(\psi_N(0), 0), \dots, \dot{C}(\psi_N(t_{i-1}), t_{i-1})) \prod_{m=0}^{i-1} K(t_{m+1}^{3m+1}, t_m) \times \right. \\ \left. \times \exp A(\psi_N(t_m), t_m) \delta_m \right] u_0, \quad (4)$$

$$l = 1, 2, \dots, N; \quad \psi_N(0) = u_0; \quad u_0 \in \mathbf{B}.$$

где $f_{t_l}^{(N)}$ — функция из $\mathcal{B}_0$, сопоставляемая, согласно (3), функционалу f_t и разбиению π_N . Индексы над операторами указывают порядок их действия. Функция от упорядоченно действующих операторов определена в соответствии с (4). Таким образом, задана последовательность отображений начального условия: $\psi_N(t_l) = T_N(t_l, f_t, u_0)$, $N=1, 2, \dots$

О п р е д е л е н и е 1. Если при $N \rightarrow \infty$ для любого $u_0 \in \mathbf{B}$ в банаховом пространстве $\mathbf{B}$ существует предел $\lim_{N \rightarrow \infty} T_N(t, f_t, u_0) = T(t, f_t, u_0)$, то нелинейный оператор $T(t, f_t, \cdot) : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ называется *T-отображением*.

Т е о р е м а 1. Пусть $f_t \in \mathcal{B}(c, \rho+1)$. Если операторы A и C_j , $1 \leq j \leq n$, обладают свойствами (I) — (III) и а) — в), то существует *T-отображение* $T(t, f_t, \cdot)$, причем

$$\|T(t, f_t, u_0)\|_{\mathbf{B}} \leq c \|f_t\|_{\mathcal{B}(c, \rho)} \|u_0\|_{\mathbf{B}} \exp(\sigma_1 + \sigma_2)t.$$

Если $f_t \in I(c, \rho)$, то $T(t, f_t, \cdot) = 0$.

5. Рассмотрим преобразование Фурье функционалов из алгебры $\mathcal{B}(c, \rho)$. Эта операция оказывается полезной, например, при вычислении асимптотических разложений континуальных интегралов. С формальной точки зрения, преобразование Фурье $*$, вводимое ниже, записывается в виде континуального интеграла

$$\begin{aligned} \tilde{f}_t(p_\tau) &= \int \mathcal{D}x f_t(x_\tau) \exp i \left(-p_\tau x_t + \int p_\tau dx_\tau \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (2\pi)^{-nN/2} \int dx f_t^{(N)}(x) \exp i \left\{ -p_N x_N + \sum p_h (x_{h+1} - x_h) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Чтобы определить предельный переход в формуле (5), вводится банахово пространство функционалов $\mathcal{L}(c, \rho)$, определенных на множестве λ кусочно-постоянных функций параметра $\tau \in [0, t]$ со значениями в $\mathbf{R}^n$. Если l — целое положительно, то функция $p_{\tau, l} \in \lambda$ задается набором l точек пространства — времени $\{(p_h, t_h)\}_{h=1}^l : p_{\tau, l} = \{p_1, 0 \leq \tau < t_1; \dots; p_l, t_{l-1} \leq \tau \leq t\}$, где $t_l = t$, $p_i \in \mathbf{R}^n$. Пары (p_h, t_h) называются параметрами точек разрыва. Элементами банахова пространства $\mathcal{L}(c, \rho)$ являются функционалы, непрерывные по параметрам точек разрыва с конечной нормой $\|\varphi_l\| = \sup c^l |\varphi_l(p_{\tau, l})| / \prod (1 + |p_j - p_{j-1}|)^{\rho}$, где $p_0 = 0$. Элементами пространства $\mathcal{L}_B(c, \rho)$ являются функции, определенные на λ , принимающие значения в банаховом пространстве $\mathbf{B}$, непрерывные по параметрам точек разрыва и имеющие конечную норму: $\|H_l\|_{\mathcal{L}_B(c, \rho)} = \|h_l\|_{\mathcal{L}(c, \rho)}$, где $h(p_{\tau, l}) = \|H_l(p_{\tau, l})\|_{\mathbf{B}}$.

Пусть f_t и φ_l — функционалы, определенные на λ и $f_t^{(N)}$, $\varphi_l^{(N)}$ — функции, сопоставляемые им по правилу (3). Пусть, далее,

$$\tilde{f}_t^{(N)}(p) = (2\pi)^{-nN/2} \int dx f_t^{(N)}(x) \exp i \left\{ -p_N x_N + \sum_{h=1}^{N-1} p_h (x_{h+1} - x_h) \right\},$$

$$\langle \tilde{f}_t^{(N)}, \varphi_l^{(N)} \rangle_N = (2\pi)^{-nN/2} \int dp \tilde{f}_t^{(N)}(p) \varphi_l^{(N)}(p).$$

О п р е д е л е н и е 2. Если на $\mathcal{L}(c, \rho)$ существует непрерывная линейная форма $\tilde{f}_t$ такая, что $\langle \tilde{f}_t, \varphi_l \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \tilde{f}_t^{(N)}, \varphi_l^{(N)} \rangle_N$, то элемент $\tilde{f}_t \in \mathcal{L}^*(c, \rho)$ называется *Фурье-образом функционала* f_t .

* В физической литературе (4, 11, 12) используется операция, которую было бы можно назвать функциональным преобразованием Фурье, по математическая теория еще только зарождается (5).

Теорема 2. Если $f_t \in \mathcal{B}(c, \rho)$, то существует Фурье-образ $\tilde{f}_t$, действующий на элементы из $\mathcal{L}(c, \rho)$ по правилу (6), причем

$$\|\tilde{f}_t\|_{\mathcal{L}^*(c, \rho)} \leq \|f_t\|_{\mathcal{B}(c, \rho)}.$$

Если $f_t \in I(c, \rho)$, то $\tilde{f}_t = 0$.

Выпишем представление формулы двойственности

$$\langle \tilde{f}_t, \varphi_t \rangle = f_0 \varphi_t(0) + \sum \int ds \int dp \varphi_t(p_{\tau, i}) f_t(\Gamma(s)p, s), \quad (6)$$

где $p_{\tau, i} = \{0, 0 \leq \tau \leq s^1; p_1, s^1 \leq \tau \leq s^2; \dots; p_l, s^l \leq \tau \leq l\}$; $(s^1, \dots, s^l) = \gamma(s_1, \dots, s_l)$ — перестановка точек $s_1, \dots, s_l$ в неубывающем порядке. γ_k — новый номер точки s_k в упорядоченном наборе $s^1, \dots, s^l$, а $\Gamma(s)p$ — вектор из $\mathbf{R}^n \times \dots \times \mathbf{R}^n$ с компонентами

$$\Gamma(s)p = (p_{v_1} - p_{v_1-1}, \dots, p_{v_l} - p_{v_l-1}), \quad p = (p_1, \dots, p_l) \in \mathbf{R}^{n_l}, \quad p_0 = 0.$$

6. Заметим, что $\mathcal{L}^*(1, 0) \cong \mathcal{L}^*(c, \rho)$ при всех $c \geq 1, \rho \geq 0$, и рассмотрим функционал $\psi_{t, \omega}(p_\tau) = \exp i(p_0 \omega_0 + \int \omega_\tau dp_\tau) \in \mathcal{L}(1, 0)$, зависящий от траектории $\omega_\tau \in C_{[0, t]}$ как от параметра.

Лемма 4. Если $f_t \in \mathcal{B}(c, \rho)$, то $\langle \tilde{f}_t, \psi_{t, \omega} \rangle = f_t(\omega_t)$.

Это равенство является формулой обращения преобразования Фурье*.

Определение 3. Если $\mathbf{B}$ — рефлексивное банахово пространство, $\varphi_t \in \mathcal{L}_\mathbf{B}(c, \rho)$, $f_t \in \mathcal{B}(c, \rho)$, то величиной $\psi = \langle \tilde{f}_t, \varphi_t \rangle$ будем называть элемент из $\mathbf{B}$ такой, что для любого $\chi \in \mathbf{B}^*$ выполнено $\psi(\chi) = \langle \tilde{f}_t, \chi(\varphi_t) \rangle$.

Предложение 5. Пусть выполнены условия теоремы 1, $\mathbf{B}$ — рефлексивное банахово пространство и операторы $A(\tau)$ и $C_j(\tau)$, $1 \leq j \leq n$, зависят только от параметра $\tau \in [0, t]$.

Тогда $T(t, f_t, u_0) = \langle \tilde{f}_t, H_t \rangle$, где $H_t \in \mathcal{L}_\mathbf{B}(c, \rho)$ и

$$H_t(p_{\tau, i}) = \left[\prod_{m=1}^l \mathcal{K}^{2m-1}(t_m, t_{m-1}) \exp i \sum_{k=1}^{l-1} C^{2k}(t_k)(p_k - p_{k-1}) \right] u_0.$$

Оператор $\mathcal{K}(s, \tau)$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра:

$$\mathcal{K}(s, \tau) = \mathcal{K}(s, \tau) + \int_{\tau}^s \mathcal{K}(s, \tau') \circ A(\tau') \circ K(\tau', \tau) d\tau'.$$

Формальный вывод аналогичного соотношения был известен Фейнману^(4, 11).

Московский институт
электронного машиностроения

Поступило
19 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. П. Маслов, Операторные методы, М., «Наука», 1973. ² В. П. Маслов, Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана, М., «Наука», 1975. ³ В. П. Маслов, А. М. Чеботарев, ДАН, т. 222, № 5, 1037 (1975). ⁴ Р. Фейнман, А. Хибс, Квантовая механика и интегралы по траекториям, М., «Мир», 1968. ⁵ М. В. Карасев, О квантовании Фейнмана, Московск. ин-т электронного машиностр., Деп. ВИНТИ, 1974. ⁶ R. H. Kraichnan, J. Math. Phys., v. 2, 124 (1961). ⁷ P. L. Chow, J. Math. Phys., v. 13, 1224 (1972). ⁸ В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, т. 58, 2, 624 (1970). ⁹ R. H. Cameron, D. A. Storvick, Nagoya Math. J., v. 51, 91 (1973). ¹⁰ G. W. Johnson, D. L. Skoug, J. Math. Anal. Appl., v. 50, 3, 647 (1975). ¹¹ Р. П. Фейнман, Проблемы современной физики, т. 3, 37 (1955). ¹² Д. И. Злохинец, Б. М. Барбашов, УФН, т. 106, 4, 593 (1972).

* Поскольку функционалы из $\mathcal{B}(c, \rho)$ полностью определяются своими значениями на гладких траекториях, то формулу обращения достаточно получить для непрерывных траекторий.