

УДК 513.831

МАТЕМАТИКА

Б. Э. ШАПИРОВСКИЙ

О МОЩНОСТИ НАСЛЕДСТВЕННО НОРМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 18 VII 1975)

Пример наследственно нормального наследственно сепарабельного бикомпакта, характер каждой точки которого равен $c=2^{\aleph_0}$, был построен недавно в дополнительном аксиоматическом предположении (более слабом, чем $V=L$, но более сильном, чем GCH) В. В. Федорчуком ⁽⁴⁾, который решил тем самым (отрицательно) ряд проблем, относящихся к теории кардинальных инвариантов. Благодаря этому примеру и результатам нашей работы (следствие 3, следствие 2') установлена независимость от системы аксиом ZF теории множеств следующих утверждений:

1. Существует наследственно нормальный бикомпакт с условием Суслина, характер каждой точки которого равен c .

2. Существует наследственно нормальное сепарабельное пространство, мощность которого равна 2^c .

Таким образом, существование как бикомпакта Федорчука ⁽⁴⁾, так и наследственно нормального наследственно сепарабельного мощности 2^c пространства Хайнала — Юхаса ⁽¹¹⁾ (построенного в предположении GCH), не зависит от общепринятых аксиом теории множеств.

Эти факты были установлены благодаря анализу понятия b -точки и b -псевдохарактера точки ⁽⁷⁾.

Замкнутое в X множество $K \subset X$ назовем крылом точки $x \in X$ в X , если $x \in [K \setminus \{x\}]$. Точка x называется b -точкой в X ⁽⁷⁾, если она является пересечением двух своих крыльев в X . Положим

$$\mathfrak{F}(x, X) = \{K \subset X: K \text{ — крыло } x \text{ в } X\}.$$

Семейство $\mathcal{F}$ — b -псевдосеть точки x в X , если $\mathcal{F} \subset \mathfrak{F}(x, X)$ и $\bigcap \mathcal{F} = \{x\}$. Если, кроме того, $\mathcal{F}$ состоит из канонических множеств, то говорят, что $\mathcal{F}$ — Δ -псевдосеть x в X . Δ -псевдосеть $\mathcal{R}$ точки x в X называется δ -псевдосетью x в X , если $[\text{Int } \bigcap \mathcal{R}] \ni x$ для всякого конечного подсемейства $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$. Положим

$$b\psi(x, X) = \min \{|\mathcal{F}|: \mathcal{F} \text{ — } b\text{-псевдосеть } x \text{ в } X\} \text{ — } b\text{-псевдохарактер } x \text{ в } X.$$

Аналогично определяются $\Delta\psi(x, X)$ и $\delta\psi(x, X)$ *. Вполне упорядоченную по убыванию b -псевдосеть $\mathcal{K} = \{K_\alpha: \alpha < \tau\}$ точки x в X будем называть колодезом точки x в X (глубины τ). Ясно, что

$$k(x, X) = \min \{|\mathcal{K}|: \mathcal{K} \text{ — колодез } x \text{ в } X\} \text{ — регулярный кардинал}$$

и $b\psi(x, X) \leq k(x, X)$ (считаем, что для изолированной точки k -, b -, Δ - и δ -псевдохарактеры равны 1).

Атомом точки $x \in X$ в $Y \subset X$ назовем кардинальное число

$$a(x, Y) = \min \{|M|: M \subset Y \setminus \{x\}, [M] \ni x\} \text{ при } x \in [Y \setminus \{x\}],$$

$a(x, Y) = 1$ при $x \in [Y] \not\in \mathfrak{F}(x, X)$, и $a(x, Y) = 0$ при $x \notin [Y]$ (см. также ⁽⁸⁾). Ясно, что $t(x, X) = \sup \{a(x, Y): Y \subset X\}$. Положим также

$$t_c(x, X) = \sup \{a(x, F): F \text{ замкнуто в } X\} \text{ — } c\text{-теснота } x \text{ в } X.$$

* Относительно перечисленных выше понятий см. также ⁽⁷⁾. Обозначения и понятия, оставшиеся неразъясненными, можно найти в ^(3, 5, 8).

Пусть $x \in X \supset M$ и $|M|_x = \min \{ |O_x \cap M| : O_x - \text{окрестность } x \text{ в } X \}$. Будем говорить, что x — κ -точка для M (в X) и писать $x \kappa M$, если x — точка наибольшего накопления для M , т. е. $|M|_x > |M|_y$ для всех $y \in X \setminus \{x\}$ ⁽³⁾. При $\text{cf}(|M|) = |M| \geq \nabla \text{ic}(X)$ (см. ⁽⁵⁶⁾) существует $x \in X$, для которой $|M|_x = |M|$ (т. е. x — точка полного накопления для M ⁽¹⁾). Поэтому, если $\mathcal{K} = \{K_\alpha : \alpha < \tau\}$ — колодец x в X , $\tau \geq \nabla \text{ic}(X)$, $x_\alpha \in K_\alpha \setminus \{x\}$ и $M = \{x_\alpha : \alpha < \tau\}$, то $x \kappa M$ и $a(x, X) \leq \tau$. Если при этом $a(x, X) = \tau$, то $[M] \setminus \{x\} = \bigcup \{F_\beta : \beta < \tau\}$, где $F_\beta = \{x_\alpha : \alpha < \beta\}$. Итак, доказано

Предложение 1⁰. Пусть $\nabla \text{ic}(X) \leq k(x, X) = \tau$. Тогда существует $M \subset X$, для которого $x \kappa M$ и $|M| = \tau$, и если $a(x, X) = \tau$, то $\psi(x, [M]) = \tau$.

Все пространства далее предполагаются регулярными и бесконечными.

Утверждение 1⁰. Пусть $x \in X$. Тогда существуют колодцы точки x в X глубины $\tau_1 = \text{cf}(\psi(x, X))$ и $\tau_2 = \text{cf}(\delta\psi(x, X))$ и, следовательно, $b\psi(x, X) \leq k(x, X) \leq \min\{\tau_1, \tau_2\}$. Если x — π -точка в X^* , то существует, кроме того, колодец глубины $\tau_3 = \text{cf}(\Delta\psi(x, X))$ точки x в X .

Для неизолированной точки $\psi(x, X) = \nu \geq \aleph_0$ и существует псевдобаза $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha < \nu\}$ точки x в X такая, что $\bigcap \{[B_\alpha] : \alpha < \nu\} = \{x\}$. Если $\bigcap \{[B_\alpha] : \alpha < \beta\} = H_\beta \notin \mathcal{F}(x, X)$ для некоторого $\beta < \nu$, то, выбрав окрестность U точки x в X так, чтобы $[U] \cap (H_\beta \setminus \{x\}) = \Lambda$, и положив $B'_\alpha = B_\alpha \cap U$, получаем, что семейство $\mathcal{B}' = \{B'_\alpha : \alpha < \beta\}$ — псевдобаза x в X и $|\mathcal{B}'| < \nu$. Следовательно, $H_\beta \in \mathcal{F}(x, X)$ и $\mathcal{H} = \{H_\beta : \beta < \nu\}$ — колодец x в X . Ясно, что существует подколодец $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ глубины $\text{cf}(\nu) = \tau_1$, и, значит, $k(x, X) \leq \tau_1$. Остальное доказывается дословным повторением проведенного рассуждения. Более того, в случае πb -точки $x \in X$ так же получаем $k(x, X) \leq \text{cf}(b\psi(x, X)) \leq b\psi(x, X)$ и, следовательно, справедливо

Утверждение 1. Пусть x — πb -точка в X . Тогда $k(x, X) = b\psi(x, X)$ и, значит, $b\psi(x, X)$ регулярен.

В силу утверждения 1 немедленно получаем также

Утверждение 1¹. Пусть $\psi(x, X) \leq \tau$. Тогда или $\psi(x, X) < \tau$ или $k(x, X) \leq \text{cf}(\tau)$, и, следовательно, $b\psi(x, X) \leq k(x, X) < \tau \cdot \text{cf}(\tau)^+$.

Утверждение 2. Пусть x — πb -точка в X и K — крыло x в X . Тогда $\psi(x, K) = \psi(x, X) \geq \text{cf}(\psi(x, X)) \geq b\psi(x, X) = b\psi(x, K)$.

Доказательство. Очевидно, что существует семейство $\mathcal{B}$ окрестностей точки x в X такое, что $|\mathcal{B}| = \psi(x, K) = \tau$ и $K \cap H = \{x\}$, где $H = \bigcap \{[B] : B \in \mathcal{B}\}$. Так как $H \notin \mathcal{F}(x, X)$ (иначе x — b -точка в X), то семейство $\{B \setminus (H \setminus \{x\}) : B \in \mathcal{B}\}$ — псевдобаза x в X . Итак, $\psi(x, X) = \tau$ и в силу утверждений 1⁰ и 1 $\text{cf}(\tau) \geq b\psi(x, X)$. Ясно также, что для всякой b -псевдобазы $\mathcal{F}$ точки x в X семейство $\mathcal{F}' = \{K \cap F : F \in \mathcal{F}\}$ — b -псевдобаза x в K , откуда и получаем $b\psi(x, X) = b\psi(x, K)$.

Всюду далее $B(X) = \{x \in X : x \text{ — } b\text{-точка в } X\}$.

Теорема 1. $X = B(X) \cup \{x : \psi(x, X) \leq \bar{c}(X)\} \cup \{x : t_c(x, X) \leq \bar{c}(X)\}$.

Доказательство. Пусть x — πb -точка в X и существует $F \in \mathcal{F}(x, X)$, для которого $a(x, F) > \bar{c}(X)$. Тогда в силу предложения 3' из ^(5a) $\psi(x, F) \leq \bar{c}(F) \leq \bar{c}(X)$, и в силу утверждения 2 $\psi(x, X) \leq \bar{c}(X)$.

Следствие 1. Всякая πb -точка дискретносчетного пространства ** есть или точка счетного псевдохарактера или точка счетной s -тесноты.

В силу утверждения 1 из ^(5a) $\psi(X) \leq 2^{\bar{c}(X)}$; утверждение 1' влечет

Предложение 1. Пусть $2^{\bar{c}(X)} \leq \tau$. Тогда $X = \{x : \psi(x, X) < \tau\} \cup \{x : k(x, X) \leq \text{cf}(\tau)\}$. Если, кроме того, $\tau > \text{cf}(\tau)$, то $k(x, X) < \tau$ и тем более $b\psi(x, X) < \tau$ для всех $x \in X$.

* Точка $x \in X$ называется π -точкой в X ⁽⁶⁾, если $\Delta\psi(x, X) < \aleph_0$. Будем говорить, что x — πb -точка в X , если $\Delta\psi(x, X) \geq \aleph_0$ и, соответственно, πb -точка в X , если $b\psi(x, X) \geq \aleph_0$. Легко видеть, что при $b\psi(x, X) > 2$ семейство $\mathcal{F}(x, X)$ замкнуто относительно конечных пересечений и, следовательно, $b\psi(x, X) \geq \aleph_0$ и x — πb -точка в X . Всякая неизолированная π -точка в X является, таким образом и b -точкой в X , и если $X \setminus \{x\}$ нормально, то $\Delta\psi(x, X) = 2$ (точку x , для которой $\Delta\psi(x, X) = 2$, будем называть Δ -точкой в X).

** Пространство X дискретносчетно, если $\bar{c}(X) \leq \aleph_0$. Такие пространства называют также наследственно суслинскими (см., например, ^(5a)).

В ⁽²⁾ наследственно нормальные пространства фигурируют как T_5 -пространства. Мы будем придерживаться этой терминологии, поскольку она подчеркивает естественное место наследственной нормальности в иерархии аксиом отделимости.

Лемма 1. Пусть X — T_5 -пространство и K — крыло точки x в X . Тогда существует $H \ni x$ такое, что $H \subset K$ и $\Delta\psi(H, X) \leq a(x, K)$.

Доказательство. Очевидно, что существует замкнутое $F \ni x$ такое, что $[K \setminus F] \ni x$ и $\psi(F, X) \leq a(x, K)$. Если $x \notin [F \setminus K]$, то, положив $H' = F \setminus [F \setminus K]$, получаем, что $\psi(H', X) \leq a(x, K)$. Если же $x \in [F \setminus K]$, то, поскольку в силу нормальности $X \setminus (F \cap K)$ существуют открытые в X множества U, V , для которых $U \supset F \setminus K, V \supset K \setminus F$ и $H = [U] \cap [V] \subset F \cap K$, заключаем, что H — искомое множество. Действительно, $x \in H$ и $\Delta\psi(H, X) = 2$.

Из леммы 1 легко получаем

Предложение 2. Пусть X — T_5 -пространство и $x \in X$. Тогда $\Delta\psi(x, X) \leq b\psi(x, X) \cdot t_c(x, X)$.

В силу теоремы 1 предложение 2 влечет

Предложение 2'. Пусть X — T_5 -пространство и $x \in X$. Тогда $\Delta\psi(x, X) \leq b\psi(x, X) \bar{c}(X)$.

Следствие 1'. Если X — дискретносчетное T_5 -пространство, то $b\psi(x, X) = \Delta\psi(x, X)$ для всех $x \in X$.

Из предложений 1 и 2' немедленно вытекает

Теорема 2'. Пусть X — T_5 -пространство и $2^{\bar{c}(X)} \leq \tau < \text{cf}(\tau)$. Тогда $\Delta\psi(x, X) < \tau$ для всех $x \in X$.

Следствие 2'. Если X — дискретносчетное T_5 -пространство и $\text{cf}(c) < c$, то $\Delta\psi(x, X) < c$ для всех $x \in X$.

Легко видеть, что $|\{x \in X: \Delta\psi(x, X) \leq v\}| \leq w_1(X)^v$. Поэтому, положив для всякого кардинала τ

$$\sigma(\tau) = \sum \{\tau^v: v < \tau\},$$

получаем

Утверждение 3. Если $w_1(X) \leq \tau$, то $|\{x \in X: \Delta\psi(x, X) < \tau\}| \leq \sigma(\tau)$.

Так как $\text{cf}(2^\tau) > \tau$ и $\sigma(2^\lambda) = \sum \{2^v: \lambda \leq v < 2^\lambda\}$, то справедливо

Утверждение 4 (GLH). Если $\tau = 2^\lambda$, то $\sigma(\tau) < 2^\tau$.

(Напомним, что GLH означает « $\text{Ln}(2^\tau) = \tau^+$ для всех τ » (см. ⁽⁵⁰⁾). Обозначим через SA_τ утверждение « $\text{GLH}^+(\tau > \text{cf}(\tau))$ » и пусть $SA = SA_\omega$. При $\tau = 2^\lambda$ утверждение SA_τ не зависит от ZF (см. ⁽⁹⁾).

Теорема 2. Пусть X — T_5 -пространство и $2^{\bar{c}(X)} = \tau$. Тогда, если $\tau > \text{cf}(\tau)$, то $|X| \leq \sigma(\tau)$ и в предположении SA_τ $|X| \leq \sigma(\tau) < 2^\tau$.

Доказательство. В силу предложения 4 из ^(5a) существует покрытие $\mathcal{E}$ пространства X такое, что $|\mathcal{E}| \leq 2^{\bar{c}(X)}$ и $s(F) \leq \bar{c}(X)$ для всех $F \in \mathcal{E}$. Следовательно, $w_1(F) \leq 2^{s(F)} \leq \tau$, и в силу теоремы 2' и утверждения 3 $|F| \leq \sigma(\tau)$ для всех $F \in \mathcal{E}$. Тогда $|X| \leq \sigma(\tau)$ и по утверждению 4 $\sigma(\tau) < 2^\tau$.

Следствие 2 (SA). Мощность дискретносчетного T_5 -пространства $< 2^c$.

Поскольку в предположении GLH для всякого T_5 -пространства $\bar{c}(X) \leq s(X)$ ^(5a, b), из утверждений 3, 4 и теоремы 2' так же точно вытекает

Теорема 2'. Пусть X — T_5 -пространство и $2^{s(X)} = \tau$. Тогда в предположении SA_τ $|X| \leq \sigma(\tau) < 2^\tau$.

Следствие 2' (SA). Мощность сепарабельного T_5 -пространства $< 2^c$.

Так как для бикомпакта $\nabla ic(X) \leq \aleph_0$, из предложения 1' и утверждений 1 и 2 вытекают следующие предложения.

Предложение 3'. Пусть X — бикомпакт и x — nb -точка в X . Тогда $t_c(x, X) \leq b\psi(x, X)$, и если $a(x, F) = b\psi(x, X)$ для некоторого $F \in \mathfrak{F}(x, X)$, то и $\chi(x, X) = b\psi(x, X)$. *

* $b\chi(x, X) = \min \{|\mathcal{F}|: \mathcal{F} - b\text{-сеть } x \text{ в } X\}$ — b -характер x в X (см. ⁽⁷⁾). Очевидно, что $b\chi(x, X) \leq k(x, X)$ для бикомпакта X , и если x — nb -точка в X , то в силу утверждения 1 $b\chi(x, X) = b\psi(x, X)$ и, как легко видеть, $b\psi(x, X) \geq \aleph_1$. $\nabla t_c(x, X) = \sup \{a(x, F)^+: F \text{ замкнуто в } X\}$.

Предложение 3°. Пусть X — бикомпакт, x — nb -точка в X и $b\psi(x, X) < \chi(x, X)$. Тогда $\nabla t_c(x, X) \leq b\psi(x, X)$.

Из предложений 2, 3° и утверждения 1' непосредственно следует

Теорема 3°. Пусть X — бикомпактное T_5 -пространство. Тогда $\Delta\psi(x, X) = b\psi(x, X)$, и если $\chi(X) \leq \tau < cf(\tau)$, то $\Delta\psi(x, X) < \tau$ для всех $x \in X$.

Для бикомпактного T_5 -пространства $w_1(X) \leq 2^{c(X)}$ (^{5в}, ⁷). Кроме того, если X — бикомпакт, то $X = [\{x \in X: \chi(x, X) < Ln(|X|)\}]$ (см. (¹⁰)). Поэтому в силу утверждений 3 и 4 из теоремы 3° вытекает

Теорема 3. Пусть X — бикомпактное T_5 -пространство и $2^{c(X)} = \tau$. Тогда, если $\tau > cf(\tau)$, то $|X| \leq \sigma(\tau)$, и в предположении SA_τ $|X| \leq \sigma(\tau) < 2^{\tau}$ и $X = [\{x \in X: \chi(x, X) < \tau\}]$.

Следствие 3 (SA). Если X — бикомпактное T_5 -пространство с условием Суслина, то $|X| < 2^c$ и $X = [\{x \in X: \chi(x, X) < c\}]$.

Необходимо отметить, что все результаты, формулируемые здесь (как выше, так и ниже) для бикомпактов, справедливы и для пространства точечно счетного типа.

Утверждение 5°. Пусть $2^{a(x, X)} \leq \tau$. Тогда $b\psi(x, X) \leq k(x, X) < \tau \cdot cf(\tau)^+$.

Доказательство. Так как $\psi(x, [M]) \leq w(x, [M]) \leq 2^{|M|}$ и $k(x, X) \leq k(x, [M])$ при $[M] \in \mathfrak{S}(x, X)$, то, положив $|M| = a(x, X)$, в силу утверждения 1' получаем требуемое неравенство. Кроме того, если x — nb -точка, то по утверждению 2 $\psi(x, X) = \psi(x, [M])$, и справедливо

Утверждение 5. Пусть x — nb -точка в X . Тогда $\psi(x, X) \leq 2^{a(x, X)}$ и, следовательно, $X = B(X) \cup \{x: \psi(x, X) \leq 2^{a(x, X)}\}$.

Здесь $a(X) = \sup \{a(x, X): x \in X\}$ — атом пространства X .

Ясно, что $a(X) \leq t_c(X) \leq t(X)$ и, кроме того, $a(X) \leq s(X)$. Очевидно также, что $X = [\{x \in X: a(x, X) \leq \aleph_0\}]$ в случае бикомпактного X , и, следовательно, утверждение 5 (вместе с 5°) влечет

Предложение 4. Пусть X — бикомпакт. Тогда $X = [B(X) \cup \{x: \chi(x, X) \leq c\}] = [\{x: b_x(x, X) \leq k(x, X) < c \cdot cf(c)^+\}]$.

В силу теоремы 3° из предложения 4 немедленно следует

Теорема 4°. Пусть X — бикомпактное T_5 -пространство. Тогда, если $c > cf(c)$, то $X = [\{x \in X: \Delta\psi(x, X) < c\}]$.

Из предложений 1° и 4 легко вытекает также

Теорема 4'. Пусть X — бикомпакт. Тогда, если $c > cf(c)$, то существуют $x \in X$ и $M \subset X \setminus \{x\}$, для которых $x \notin M$ и $|M| < c$.

Отметим, что все результаты, полученные выше в дополнительных аксиоматических предположениях, не зависят от общепринятых аксиом теории множеств, благодаря уже упоминавшемуся бикомпакту Φ из (⁴), для любой точки x которого $\Delta\psi(x, \Phi) \geq b\psi(x, \Phi) \geq c$.

В силу утверждения 1', из предложений 3 и 4 следует

Теорема 5. Пусть X — бикомпакт. Тогда, если $c > cf(c) = \aleph_1$, то b -точки, точки счетной c -тесноты и точки, характер которых строго меньше c , образуют (в совокупности) всюду плотное в X множество.

Автор глубоко признателен акад. П. С. Александрову за внимание, поддержку и интерес к этой работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 VII 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. С. Александров, П. С. Урысон, Мемуар о компактных топологических пространствах, М., 1971. ² Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М., 1934. ³ А. В. Архангельский, В. И. Пономарев, ДАН, т. 182, № 5 (1968). ⁴ В. В. Федорчук, ДАН, т. 222, № 2 (1975). ⁵ Б. Шапировский, а) ДАН, т. 202, № 4 (1972); б) ДАН, т. 218, № 1 (1974); в) ДАН, т. 223, № 4 (1975). ⁶ Е. Щепин, ДАН, т. 191, № 2 (1970). ⁷ Б. Шапировский, ДАН, т. 223, № 5 (1975). ⁸ Б. Шапировский, Матем. заметки, т. 15, № 2 (1974). ⁹ П. Коэн, Теория множеств и континуум-гипотеза, М., 1969. ¹⁰ E. Cech, B. Pospisil, Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, v. 258, 1 (1938). ¹¹ A. Hajnal, I. Juhász, Proc. Koninkl. Nederl. Acad., Ser. A, v. 76, № 4 (1973).