

С. В. ШВЕДЕНКО, Х. ТУРКУ

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В КЛАССЕ H^2 В ПОЛУПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 7 VII 1975)

Аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ функция $f(z)$ по определению принадлежит классу $H^p = H^p\{\operatorname{Re} z > 0\}$, $0 < p < \infty$, если

$$\sup_{x > 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dy < \infty.$$

Структура классов H^p в полуплоскости и их связь с известными классами H^p в единичном круге рассмотрены в монографии ⁽¹⁾.

Особое место занимает случай $p=2$, так как H^2 является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(iy) \overline{g(iy)} dy, \quad (1)$$

где $f(iy)$ и $g(iy)$ — граничные значения функций $f(z)$ и $g(z)$ из H^2 (см. ⁽¹⁾, гл. 8). Кроме того стандартными методами (см. ^(1, 2)) многие результаты, первоначально полученные для H^2 , переносятся на остальные классы H^p .

Выбор последовательности $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ различных точек полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ определяет пространство последовательностей

$$H^p(Z) = \{f(z_k)\}_{k=1}^{\infty} : f \in H^p\}.$$

В ⁽³⁾ приведены необходимые и достаточные условия совпадения пространств $H^p(Z)$ и l^p , $p > 0$. В настоящей заметке рассматриваются вопросы включений $H^2(Z)$ в l^r и l^r в $H^2(Z)$, $r > 0$, причем результаты, относящиеся к включениям первого вида, распространяются на классы H^p при любом $p > 0$.

Выбранной последовательности $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ соответствует система векторов

$$(z + \overline{z_k})^{-1} \in H^2, \quad k=1, 2, \dots, \quad (2)$$

обладающих тем свойством, что для любой функции $f(z)$ из H^2

$$f(z_k) = (f(z), (z + \overline{z_k})^{-1}), \quad k=1, 2, \dots,$$

относительно скалярного произведения (1) (см. ⁽¹⁾, гл. 8).

Лемма 1. Если для последовательности комплексных чисел $\omega = \{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ интерполяционная задача

$$f(z_k) = \omega_k, \quad k=1, 2, \dots, \quad (3)$$

разрешима в классе H^2 , то в H^2 существует единственная функция f^0 минимальной нормы, удовлетворяющая (3); при этом f^0 принадлежит замкнутой линейной оболочке в H^2 системы векторов (2).

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству теоремы 1 из ⁽⁴⁾.

Каково бы ни было $r > 0$, из условия $l^r \subset H^2(Z)$ во всяком случае следует сходимость произведений Бляшке

$$B_j(z) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{|1 - z_k^2|}{1 - z_k^2} \cdot \frac{z - z_k}{z + \bar{z}_k}, \quad j=1, 2, \dots,$$

с нулями в точках $\{z_k\}_{k \neq j}$ (см. (1), гл. 8). Если через $B_{j,n}$ обозначить соответствующие частичные произведения

$$B_{j,n}(z) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{|1 - z_k^2|}{1 - z_k^2} \cdot \frac{z - z_k}{z + \bar{z}_k}, \quad j, n=1, 2, \dots,$$

то, как и в (1), гл. 5, можно показать, что при любом j

$$(z + \bar{z}_j)^{-1} B_{j,n}(z) \rightarrow (z + \bar{z}_j)^{-1} B_j(z), \quad n \rightarrow \infty,$$

по норме гильбертова пространства H^2 . Отсюда, с учетом леммы 1 и известной теоремы о представлении правильной рациональной дроби в виде линейной комбинации простейших, вытекает

Лемма 2. Система векторов

$$f^j(z) = \frac{2 \operatorname{Re} z_j}{z + \bar{z}_j} \cdot \frac{B_j(z)}{B_j(z_j)} \in H^2, \quad j=1, 2, \dots, \quad (4)$$

образована функциями минимальной нормы пространства H^2 с интерполяционными условиями

$$f^j(z_k) = \delta_k^j, \quad j, k=1, 2, \dots;$$

при этом

$$(f^j, f^k) = \frac{4 \operatorname{Re} z_j \operatorname{Re} z_k}{B_j(z_j) \overline{B_k(z_k)} (z_j + \bar{z}_k)}, \quad j, k=1, 2, \dots$$

Лемма 3. Включения $H^2(Z)$ в l^r и l^r в $H^2(Z)$, $0 < r \leq \infty$, соответственно равносильны следующим условиям:

а) отображение $j \mapsto \{j(z_k)\}_{k=1}^{\infty}$ определяет ограниченный оператор из гильбертова пространства H^2 в банахово (полное линейное метрическое, если $r < 1$) пространство l^r ;

б) в обозначениях леммы 1 линейное отображение $\omega \mapsto f^\omega$ является ограниченным оператором из банахова (полного линейного метрического, если $r < 1$) пространства l^r в гильбертово пространство H^2 .

Утверждения леммы непосредственно вытекают из теоремы о замкнутом графике.

Следствие. Каково бы ни было $r > 0$, необходимыми условиями включений $H^2(Z)$ в l^r и l^r в $H^2(Z)$ являются соответственно:

а) $\inf_k \operatorname{Re} z_k > 0$;

б) $\sup_k \operatorname{Re} z_k |B_k(z_k)|^{-2} < \infty$.

Из лемм 1 и 3 с использованием элементарных свойств банаховых пространств последовательностей l^r , $1 \leq r \leq \infty$, вытекает

Теорема 1. Включение $H^2(Z)$ в l^r , $1 \leq r \leq \infty$, равносильно тому, что матрица Грама системы векторов (2) гильбертова пространства H^2 определяет ограниченный оператор

$$\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (z_j + \bar{z}_k)^{-1} \mu_k \right\}_{j=1}^{\infty} \quad (5)$$

из l^s в l^r , $1/r + 1/s = 1$.

Следствие 1. *Необходимым условием включения $H^2(Z)$ в l^r при $r < 2$ является*

$$\{(\operatorname{Re} z_k)^{-1}\}_{k=1}^{\infty} \in l^{r/(2-r)},$$

в частности,

$$\operatorname{Re} z_k \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Замечание. Как следует из теоремы 4 ниже, условие (6) не является необходимым для того, чтобы $H^2(Z) \subset l^2$.

Следствие 2. *Если точки последовательности $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяют условию*

$$|\arg z_k| \leq \alpha < \pi/2, \quad k=1, 2, \dots,$$

то включение $H^2(Z)$ в l^1 равносильно тому, что

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} |z_j + \bar{z}_k|^{-1} < \infty.$$

Из лемм 1, 2 и 3 вытекает также двойственная по отношению к теореме 1

Теорема 2. *Включение l^r в $H^2(Z)$, $1 \leq r \leq \infty$, равносильно тому, что матрица Грама системы векторов (4) гильбертова пространства H^2 определяет ограниченный оператор*

$$\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty} \mapsto \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \operatorname{Re} z_j \operatorname{Re} z_k}{B_j(z_j) \overline{B_k(z_k)} (z_j + \bar{z}_k)} \omega_k \right\}_{j=1}^{\infty} \quad (7)$$

из l^r в l^s , $1/r + 1/s = 1$.

Следствие 1. *Необходимым условием включения l^r в $H^2(Z)$ при $r > 2$ является*

$$\{\operatorname{Re} z_k |B_k(z_k)|^{-2}\}_{k=1}^{\infty} \in l^{r/(r-2)},$$

в частности,

$$\operatorname{Re} z_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Замечание. Как следует из теоремы 4 ниже, условие (8) не является необходимым для того чтобы $l^2 \subset H^2(Z)$.

Следствие 2. *Если точки последовательности $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ при $k \rightarrow \infty$ стремятся к мнимой оси по некасательному направлению, то включение l^{∞} в $H^2(Z)$ равносильно выполнению условия*

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} z_j \operatorname{Re} z_k}{|B_j(z_j) B_k(z_k) (z_j + \bar{z}_k)|} < \infty.$$

Используя структуру банахова (полного линейного метрического, если $p < 1$) пространства H^p , $p > 0$ (см. (5)), можно показать, что утверждение а) леммы 3 распространяется на классы H^p при любом $p > 0$. С учетом теоремы о факторизации (см. (1), гл. 8), отсюда вытекает

Лемма 4. *Включения $H^p(Z)$ в l^r и $H^2(Z)$ в $l^{2r/p}$, $0 < p < \infty$, $0 < r \leq \infty$, эквивалентны.*

Теорема 3. *Необходимым и достаточным условием включения $H^p(Z)$ в l^r , $0 < p < \infty$, $p/2 \leq r \leq \infty$, является ограниченность оператора (5) как отображения из $l^{2r/(2r-p)}$ в $l^{2r/p}$.*

Утверждение теоремы непосредственно вытекает из леммы 4 и теоремы 1.

Теорема 4. *Если последовательность $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что*

$$0 < \inf_k \operatorname{Re} z_k \leq \sup_k \operatorname{Re} z_k < \infty, \quad (9)$$

то следующие условия эквивалентны:

$$\inf_{j \neq k} |z_j - z_k| > 0; \quad (10)$$

$$l^1 \subset H^2(Z); \quad (11)$$

$$H^2(Z) = l^2; \quad (12)$$

$$H^p(Z) = l^p, \quad p > 0. \quad (13)$$

Основные утверждения теоремы вытекают из теорем 1, 2 и 3, так как прямые вычисления показывают, что при выполнении условий (9) и (10) $H^1(Z) \subset l^1$ и операторы (5) и (7), рассматриваемые как отображения из l^2 в l^2 , являются ограниченными одновременно. Часть утверждения теоремы, относящаяся к включению l^p в $H^p(Z)$, может быть доказана, например, методами, изложенными в ⁽⁶⁾ для классов H^p в единичном круге.

З а м е ч а н и е. Следствие из леммы 3 показывает, что (9) вытекает из (12); таким образом, (13) эквивалентно одновременному выполнению условий (9) и (10). Как показано в ⁽³⁾, этот же результат можно вывести из известной теоремы Г. Шапиро и А. Шилдса (см. ⁽¹⁾, гл. 10; ⁽²⁾) и В. Кабайлы (см. ⁽⁵⁾) о весовой интерполяции в классах H^p в единичном круге.

Каковы бы ни были $r < t$, очевидно

$$\{Z: H^2(Z) \subset l^r\} \subset \{Z: H^2(Z) \subset l^t\}; \quad (14)$$

$$\{Z: l^r \subset H^2(Z)\} \subset \{Z: l^t \subset H^2(Z)\}. \quad (15)$$

Исследование отображений (5) и (7) и построение специальных последовательностей $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ позволяет получить следующее утверждение.

Т е о р е м а 5. Если $1 \leq r < t \leq \infty$, то включения (14) и (15) являются собственными.

Московский институт электронной техники

Университет Приштина
Социалистическая Федеративная
Республика Югославия

Поступило

31 V 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ К. Гoffman, Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963. ² H. S. Shapiro, A. L. Shields, Am. J. Math., v. 83, № 3, 513 (1961). ³ А. М. Седлецкий, ДАН, т. 208, № 6, 1293 (1973). ⁴ С. В. Шведенко, Матем. заметки, т. 15, № 1, 101 (1974). ⁵ В. Кабайла, Лит. матем. сб., т. 3, № 1, 141 (1963). ⁶ С. В. Шведенко, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 4, 108 (1975).