

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Д. И. ШИЛЬКРУТ, П. М. ВЫРЛАН

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБОЛОЧЕК**

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 5 V 1975)

Деформация геометрически нелинейных оболочек сопровождается рядом существенно нелинейных эффектов, которые естественно не проявляются у линейных (жестких) оболочек. Главным, характерным нелинейным эффектом является многозначность решений (множество форм равновесия при одном и том же значении параметра внешней нагрузки (<sup>(1-3)</sup> и др.)); при этом число таких решений растет с увеличением относительной стрелы начального прогиба  $\xi_0$  ( $\xi_0 = f_0/h$ ,  $f_0$  — стрела начального прогиба,  $h$  — толщина тела оболочки). Поэтому на характеристиках \* этих оболочек может быть много экстремумов, самопересечений и даже отдельные замкнутые петли (<sup>(1)</sup>). Ясно, что не все формы равновесия, получаемые из решений соответствующих дифференциальных уравнений, реализуемы, что вызывает необходимость исследования их устойчивости.

В настоящей работе исследуется устойчивость в малом всех форм равновесия, получающихся при решении уравнений осесимметричных деформаций геометрически нелинейных пологих и непологих оболочек, на примере оболочек, имеющих вид сферического сегмента. Совершенно естественно, что формы равновесия, неустойчивые в малом, являются неустойчивыми и в большом, в то время как устойчивость в малом еще не защищает от потери устойчивости в большом или по несимметричным формам.

Исследования устойчивости проводятся динамическим методом путем численного решения соответствующих дифференциальных уравнений (<sup>(1-3)</sup> и др.) в два этапа: на первом этапе определяются формы равновесия и напряженное состояние оболочки, а на втором вычисляются частоты собственных гармонических колебаний, совершаемых около формы, устойчивость которой рассматривается. Критерием устойчивости в малом данной формы является вещественность всех собственных частот (<sup>(4)</sup>). Если хотя бы одна из частот мнимая, то соответствующая форма неустойчива. В качестве разрешающих уравнений берутся уравнения динамики осесимметричных деформаций, которые получены из уравнений статики (для пологих уравнений — из уравнений Маргерра, для непологих — из упрощенных уравнений Э. Рейсснера (<sup>(3)</sup>)) посредством принципа Даламбера с учетом инерционных сил, порождаемых ускорениями от прогибов. Инерционные силы от поворота сечений и перемещений в срединной поверхности не учитываются.

Решения этих уравнений представляются в виде суммы двух слагаемых, первое из которых является решением статической задачи для формы равновесия, которая исследуется на устойчивость; второе слагаемое есть малая динамическая добавка, представляющая малые гармонические колебания около данной формы равновесия. После подстановки решения в указанной форме в уравнения динамики последние линеаризуются по малой динамической добавке. Правомочность применения линеаризованных уравнений для исследования устойчивости в малом форм равновесия, строго доказана в работе (<sup>(5)</sup>) для систем с произвольным конечным числом степеней свобо-

\* Характеристикой называется зависимость нагрузки от прогиба  $\xi$  в центре оболочки ( $\xi = w(0)/h$ ,  $w(0)$  — прогиб центра оболочки).

ды. Так как, очевидно, нашу систему можно аппроксимировать с любой точностью системой с конечным числом степеней свободы, то она попадает под условия теорем из (5).

Указанный динамический метод широко применялся для исследования нелинейных систем такого же типа (6, 7).

Линеаризованные уравнения решаются в тригонометрических рядах по времени, что позволяет определить спектр частот собственных колебаний  $\omega_n$  для пологих и  $p_n$  для непологих оболочек. Последние представляются в виде

$$\omega_n = \frac{k_n h}{a^2} (Eg/12\gamma(1-\mu^2))^{1/2}, \quad p_n = \frac{\lambda_n}{R_0} (Eg/\gamma \cdot 12(1-\mu^2))^{1/2},$$

$k_n, \lambda_n$  — соответствующие собственные числа однородной краевой задачи для линеаризованных уравнений (пологих и непологих оболочек соответ-

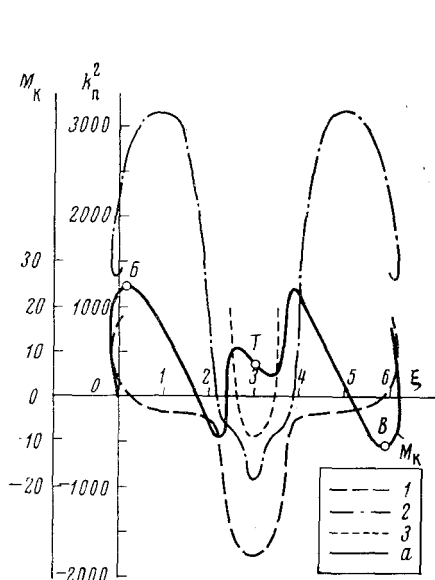


Рис. 1

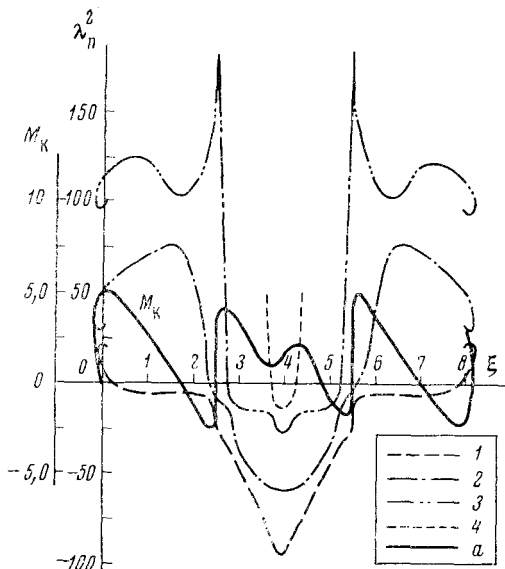


Рис. 2

Рис. 1. Характеристика (а) и графики зависимостей  $k_n^2(\xi)$  для полой сферической оболочки ( $\xi_0 = -3$ ) с шарнирно неподвижным краем, нагруженной моментом  $M_K$ . Здесь и на рис. 2 номер кривой соответствует значению  $n$

Рис. 2. Характеристика (а) и графики зависимостей  $\lambda_n^2(\xi)$  для неполой сферической оболочки ( $\theta = 0,568, R_0/h = 100$ ) с шарнирно неподвижным краем, нагруженной моментом  $M_K$

венно),  $R_0$  — радиус недеформированной срединной поверхности сферической оболочки,  $a$  — радиус плана оболочки,  $\gamma, E, \mu, g$  — объемный вес материала оболочки, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и ускорение силы тяжести соответственно.

Приведенным выше методом исследовали оболочки в большом диапазоне изменения  $\xi_0$  (где  $\xi_0 < 0$ , если оболочка расположена над своим планом) при различных видах нагружения и опирания. Приведем некоторые наиболее характерные результаты. В начале рассмотрим случай нагружения контурным моментом  $M_K$  ( $M_K > 0$ , если он действует со стороны выпуклости оболочки) по краям оболочки.

Из рис. 1 видно, что  $k_1^2$  (который является наименьшим из всех  $k_n^2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )), будучи положительным при  $M_K = 0$ , уменьшается с ростом последнего и при достижении  $M_K$  своего первого экстремума (точка Б)  $k_1^2$  становится равным нулю. При дальнейшем изменении  $M_K$  вдоль характеристики значение  $k_1^2$  остается отрицательным до последнего экстремума на-

грузки (точка  $B$ ), после чего  $k_1^2$  опять становится положительным. Значение квадрата собственного числа  $k_2^2$ , также будучи положительным при значении  $M_k$  до второго экстремума (двигаясь вдоль характеристики), становится отрицательным и остается таковым до предпоследнего экстремума нагрузки. Аналогичны поведения остальных величин  $k_n^2$ . В центре симметрии <sup>(1)</sup> (точка  $T$  на рис. 1) значения всех отрицательных  $k_n^2$  минимальны. Таким образом, после достижения нагрузки  $M_k$  первого экстремума и до последнего экстремума хотя бы одна из частот является мнимой.

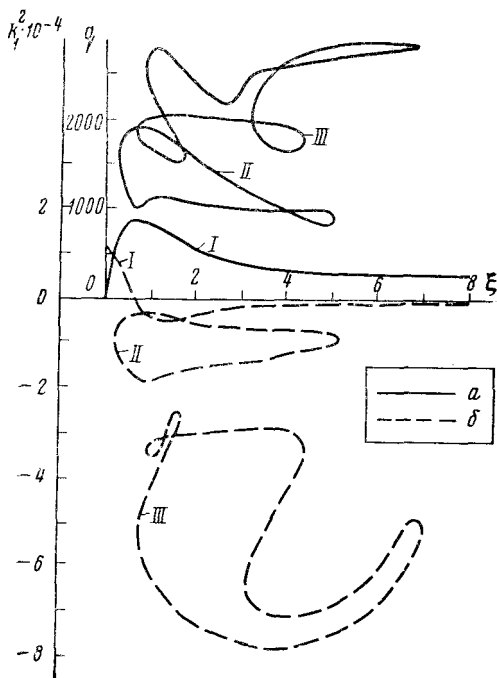


Рис. 3

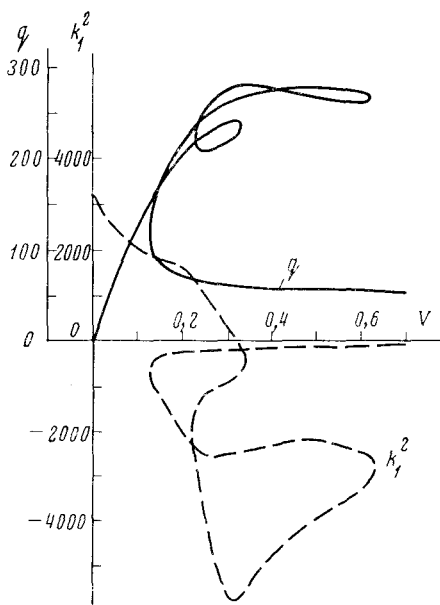


Рис. 4

Рис. 3. Характеристика ( $a$ ) и графики зависимости  $k_1^2(\xi)$  ( $b$ ) для полой оболочки ( $\xi_0 = -15,15$ ) с неподвижно заземленным краем, нагруженная давлением  $q$

Рис. 4. Зависимости  $q(V)$  и  $k_1^2(V)$  полой оболочки ( $\xi_0 = -7$ ), нагруженной давлением  $q$  и заземленной по контуру

Аналогичная картина наблюдается и для непологих оболочек сферического очертания (см. рис. 2, где через  $\theta$  обозначен центральный угол раскрытия оболочки).

Представляет особый интерес исследовать на устойчивость заземленную по краю пологую оболочку, нагруженную постоянным давлением  $q$ . Характеристика этой оболочки (рис. 3) содержит две отдельные, изолированные, замкнутые петли. Первая из них (кривая  $IIa$ ) была обнаружена в <sup>(1)</sup>, а вторая (кривая  $IIIa$ ) найдена нами сейчас. Из рис. 3 видно, что значения  $k_1^2$  (кривые  $b$ ) для обеих петель отрицательны и, следовательно, первая частота мнимая. Для основной части характеристики (кривая  $Ia$ ) остаются в силе закономерности, обнаруженные для рассмотренных ранее оболочек.

На рис. 4 приводится характеристика полой оболочки, нагруженной давлением  $q$ , где вместо прогиба  $\xi$  берется обобщенная координата  $V$  (объем, ометаемый оболочкой в процессе деформации). Сопоставляя кривые на рис. 4, можно заметить, что утверждение <sup>(8)</sup> о том, что осесимметричные формы равновесия полых оболочек устойчивы, если  $dq/dV > 0$ , и неустойчивы, если  $dq/dV < 0$ , оправдалось только для случая  $dq/dV < 0$ .

Формы равновесия, для которых  $dq/dV > 0$ , могут быть как устойчивы, так и неустойчивы.

В работе <sup>(9)</sup> рассмотрен нелинейный процесс деформации сферической оболочки от момента начала нагружения до прощелкивания, где ясно видно, что промежуточные формы, которые, как доказано в настоящей статье, являются неустойчивыми, не реализуются. Нами повторены результаты из <sup>(9)</sup> и рассмотрены еще целый ряд других случаев нагружения геометрически нелинейных сферических оболочек, которые полностью подтверждают этот вывод. Поэтому можно считать, что неустойчивость промежуточных форм равновесия доказана с точки зрения двух различных позиций.

Исследования большого числа оболочек, проведенные по данной методике как по теории пологих, так и непологих оболочек, позволили сделать следующие основные выводы:

1) все формы равновесия, соответствующие точкам на характеристике до первого экстремума (верхняя критическая нагрузка) и после последнего экстремума (нижняя критическая нагрузка), являются устойчивыми в малом, остальные формы равновесия являются неустойчивыми;

2) формы равновесия, соответствующие точкам на отдельных замкнутых петлях, являются неустойчивыми;

3) показано, что знак выражения  $dq/dV$  не может служить критерием устойчивости нелинейных оболочек;

4) подтверждено наличие сгущения спектра собственных частот, предсказываемых теорией колебаний;

5) получены зависимости собственных частот от параметра нагрузки.

Таким образом, данные настоящих исследований в сочетании с имеющимися результатами по определению бифуркационных значений нагрузок (<sup>(10-13)</sup> и др.), при которых появляются неосесимметричные формы равновесия, позволяют установить теоретические значения критических нагрузок геометрически нелинейных оболочек вращения при их осесимметричном нагружении.

Кипшиневский политехнический институт  
им. С. Лазо

Поступило  
18 X 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Д. И. Шилькрут, Н. В. Шевандронов и др., Решение задач нелинейной теории оболочек на аналоговых вычислительных машинах, Кипшинев, 1969. <sup>2</sup> В. И. Феодосьев, Угругие элементы точного приборостроения, М., 1949. <sup>3</sup> Д. И. Шилькрут, Вопросы качественной теории нелинейных оболочек, Кипшинев, 1974. <sup>4</sup> Г. Циглер, Основы теории устойчивости конструкций, М., 1971. <sup>5</sup> И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, М., 1952. <sup>6</sup> В. В. Болотин, Динамическая устойчивость упругих систем, М., 1956. <sup>7</sup> Р. Арчер, Ж. Фэмилл, Прикладная механика. Тр. американского общества инженеров-механиков, русск. пер., т. 134, № 1 (1965). <sup>8</sup> Н. В. Валишвили, Матер. VII Всесоюзн. конфер. по теории оболочек и пластинок, М., 1969, стр. 113. <sup>9</sup> В. И. Феодосьев, ПММ, т. 27, в. 2, 265 (1963). <sup>10</sup> Хуан Нэй Чэн, Прикладная механика, Тр. американск. общ. инженеров-механиков, № 3, 91 (1964). <sup>11</sup> Э. Н. Григोलюк, Ю. В. Липовцев, Инж. сб., Мех. тверд. тела, № 6, 134 (1968). <sup>12</sup> И. Д. Герлаку, Д. И. Шилькрут, Мех. тверд. тела, № 2, 184 (1970). <sup>13</sup> Н. В. Валишвили, Сб.: Теория пластин и оболочек, М., 1971, стр. 22.